



# बीजगणिताचीं मूलतत्वे.

ह्या विषयाचा मूलग्रंथ इंग्रजी भाषेत हाडन्साहेबानें केला,

त्याचें हें मराठी भाषांतर

दाजीनीळकंठनगरकर

ह्यांनीं कर्तून दीक्षिण प्रेजकमेटीसनजरकेलें,

कृष्णशास्त्री गोडबोले

ह्यांनीं तपासून द्रष्टुं केलें, तें

महाराष्ट्र शासनाच्या आर्य समाज केंद्राच्या माध्यमातून

पुणेपाठशाळेकडील छापरान्यांत छापिलें.

मुकामपुणे.

छापणार नागराजचंद्र ठकार स. छा.

सन १८९८





## सूचना.

मूळपुस्तकांत कितीएक ठिकाणीं हस्तदोषांसारख्या कांहीं चुक्या होत्या त्या नीट केल्या; कितीएक ठिकाणीं किती-  
 एक विषयांशीं कळभें फार संक्षेपानें लिहिल्यामुळे शिकणाऱ्यांस  
 समजण्यास कठीण झालीं होती तीं इतरपुस्तकांच्या साहा-  
 य्यानें वाढवून समजण्या योगीं केलीं; कितीएक प्रश्नांचीं  
 उत्तरे असंभविक दिसतात तीं खरीं आहेत असें समजण्या  
 करितां कितीएक जागीं टिपा लिहिल्या; अशारीतीनें विद्या-  
 र्थ्यांस चांगले सुलभ वाटायो जोगें जितकें करवळें तितकें  
 केले आहे.

मुकामपुणे

माहंफुजुआरीसन १८५८ }





## प्रस्तावना.



ज्यास बीजगणिताचें बरेंच ज्ञान झालें आहे , त्याच्या अनुभवास ही गोष्ट आली असेल , कीं जों पर्यंत त्यास समीकरणाच्या स्वरूपाचें ज्ञान झालें नव्हतें, तों पर्यंत त्यास बीजगणिताचा अभ्यास करण्यांत कांहीं गोडी लागत नव्हती , आणि म्हणूनच बीजगणिताचे अभ्यासासून त्याचे चिन्तास समाधान वाटत नव्हतें; कांकी तो शिकत असतां त्यास असे कितीक विषय आले , कीं जे सद्गज समजण्याजोगे नव्हते, आणि त्यानें श्रम करून कांहीं नियम समजून घेतले असतां ही त्यांचा उपयोग त्यास त्यावेळीं समजत नव्हता अशा स्थितींत, ही विद्याच निरुपयोगी आहे, असें ही केव्हां केव्हां त्याचे मनांत आल्यावांचून राहिलें नाहीं

ह्या पुस्तकांत विषयांची रचना अशी केली आहे, कीं विद्यार्थ्यांस बेरीज , वजाबाकी , गुणाकार , आणि भागाकार करितां येण्यापुरते मूळभूत नियम माहीत झाले न झाले तोंच त्यानें समीकरणाचे स्वरूपाचा विचार करूं -

## प्रस्तावना.

लागावा , आणि त्यास जें काय थोडकेंसें ज्ञान प्राप्त झालें असेल त्याचे योगानें त्यानें कांहीं प्रश्न सोडवावे . असेंच , त्यास बीजांतील अपूर्णपद नियमांची माहिती झाली म्हणजे त्याच्या वाढलेल्या ज्ञानाचे योगानें त्यास सोडवतां येतील , अशीं कांहीं समीकरणें आणि प्रश्न अपूर्णबीजपद ह्या विषयांपुढें दिले आहेत .

अलीकडे जे मोठमोठे गणिती झाले त्यांपैकीं एकानें असें लिहिलें आहे , कीं गणित वगैरे विद्या शिकविनेबेळस उदाहरणांच्या योगानें विद्यार्थ्यांचे मनांत त्या विद्यांचीं मूलतत्वे आणून देण्याची रीति जुसते नियम सांगण्याच्या रीतीपेक्षां चांगली आहे ; आणि जो शिकविण्याने कामांत बहिवाटलेला आहे तो ह्या मतास अनुसरेल . अभ्यास करते बेळस विद्यार्थ्यास कांहीं साहाय्य मिळावें , ह्या हेतूनें ह्या पुस्तकांतील बहुतएक विषयांत कांहीं उदाहरणें व प्रश्न सोडवून त्यांत नियमांचें बरेच स्पष्टीकरण केले आहे .

---

# अनुक्रमणिका.

## प्रकरण १.

पृष्ठ.

व्याख्या पहिले नियम, आणि ते कांहीं समीक-  
रणें व कांहीं प्रश्न सोडविण्यांत कसे लागू होता-  
त तो प्रकार : ... .. १

## प्रकरण २.

अपूर्णबीजपदे, आणि त्यांचे योगानें प्रश्न क-  
से सोडवावे तो प्रकार . . . . . ३२

## प्रकरण ३.

घात करणें . . . . . ७५

मूळकाढणें . . . . . ७९

## प्रकरण ४.

करणी . . . . . ८९

## प्रकरण ५.

एकवर्णसमीकरणें . . . . . ९६

प्रश्न . . . . . १११

## प्रकरण ६.

वर्गसमीकरणें (ज्यांत एक अव्यक्तपद आहे) --- ११८

----- (ज्यांत अनेक अव्यक्तपदे आहेत) --- १४३

## प्रकरण ७.

असमपदे . . . . . १८४

गुणोत्तर . . . . . १८७

प्रमाण . . . . . १९१

विकार . . . . . १९८

## अनुक्रमणिका .

### प्रकरण ८

गणितश्रेढी .	पृष्ठ .
गणितश्रेढी .	२०८
भूमितिश्रेढी .	२२५
गायनश्रेढी .	२४१

### प्रकरण ९.

द्विपदकरणी	२५०
------------	-----

### प्रकरण १०.

अनिश्चितवेद्याप्रकाशक	२५१
-----------------------	-----

### प्रकरण ११.

लागरथम .	२६०
----------	-----

### प्रकरण १२.

द्विपदसिद्धान्त	२६४
-----------------	-----

### प्रकरण १३.

पाक्षिकविपर्यय, सार्वत्रिकविपर्यय, आणि संयोग	२७५
---	-----

### प्रकरण १४.

चक्रवाटव्याज आणि प्राप्ति	२९४
---------------------------	-----



# बीजगणित.

## प्रकरण १

(१) ज्यां विद्येत्त विवक्षित संख्येचें किंवा संख्यांचें सामान्यतः अक्षरांनीं व कार्यप्रकाशकचिन्हांनीं प्रदर्शित केले असतें, त्या विद्येस **बीजगणित** असें म्हणतात. त्यांत जीं अक्षरें येतात तीं दोन जातींचीं पदे दाखवितात. **अ, ब, क,** इत्यादि अक्षरें व्यक्त पदे दाखवितात, आणि **क्ष, य, झ,** इत्यादि अक्षरें अव्यक्त पदे दाखवितात.

त्या गणितांत ज्या कार्यप्रकाशकचिन्हांनी योजना करितात तीं चिन्हे लिहितां.

== त्या चिन्हास **बरोबरीचें** चिन्ह असें म्हणतात.

+ त्यास **धन** चिन्ह म्हणतात. हें चिन्ह **बेरीज** दाखवितें. उदाहरण, जसें  $३ + ५ = ८$  आणि  $५$  त्यांची बेरीज  $= ८$ ; तसें,  $अ + ब = अ$  आणि  $ब$  त्यांची बेरीज.

— त्यास **ऋण** चिन्ह म्हणतात. हें चिन्ह **बजाबा-**

की दाखवितें . उदाहरण, जसें ५-२= पांच  
आणि दोन ह्यांची वजाबाकी=३ ; तसें, ब-क  
= ब आणि क ह्यांची वजाबाकी .

जेव्हां क्ष आणि य ह्या दोन पदांतून मोठे को-  
णतें बलवान कोणतें हें कळत नाही , तेव्हां ह्यांचें अं-  
तर ~ ह्या चिन्हांनें दाखवितात . म्हणजे क्ष~य .  
किंवा . ह्यास गुणन चिन्ह म्हणतात . हें गु-  
णाकार दाखवितें . उदाहरण , २क × ३ ड =  
दुप्पट क आणि तिप्पट ड ह्यांचा गुणाकार .  
येथें दोहोंस कचा वेळाप्रकाशक किंवा गु-  
णक म्हणतात , आणि तिहींस डचा वेळा  
प्रकाशक किंवा गुणक म्हणतात . अक्ष  
आणि बक्ष ह्यांचा अर्थ अ × क्ष आणि  
ब × क्ष असा आहे . येथें अ आणि ब ह्यां  
स क्षचें अक्षर वेळाप्रकाशक म्हणतात .  
कधी कधी गुणाकार पुढें सांगितल्या रीतीप्र-  
माणें लिहितात . (अ+ब) . (क-ड)  
किंवा (अ+ब)(क-ड) किंवा अ+ब .  
क-ड ह्याचा अर्थ असा आहे की, अ आणि

ब ह्यांच्या बेरजेस क आणि ड ह्यांच्या वजा-  
बाकीने गुणावे. अब+क, ह्याचा अर्थ अ-  
सा आहे कीं, अ आणि ब ह्यांचा गुणाकार  
करून त्यांत क मिळवावा. जर अ=२, ब=३,  
आणि क=१, अशा संख्या धरल्या तर अब+  
क=२×३+१=७. अ(ब+क), ह्याचा  
अर्थ असा आहे कीं, ब आणि क ह्यांचे बेर-  
जेस अने गुणावे; वरचे प्रमाणेच जर अ=२,  
ब=३, आणि, क=१, अशा संख्या धरिल्या तर,  
अ(ब+क)=२(३+१)=२×४=८ होतात.  
ह्या चिन्हास भाजनचिन्ह म्हणतात. हे चिन्ह  
भागाकार दाखविते. उदाहरण,  $m \div n$  किंवा  
प्रसिद्ध रीतीच्या अन्वये  $\frac{m}{n}$  ह्याचा अर्थ नने म-  
ला भागावे असा आहे. जर म=६ आणि न=२  
असे धरले तर,  $\frac{m}{n} = \frac{6}{2} = 3$  होतात.

ह्या चिन्हास प्रमाणचिन्ह म्हणतात. उदाह-  
रण, अ : ब :: क : ड. ह्याचा अर्थ असा आ-  
हे कीं, अ आणि ब ह्यांच्या मध्ये जें प्रमाण  
आहे, तेंच प्रमाण क आणि ड ह्यांच्या मध्ये



आहे .

✓ किंवा  $\sqrt{\text{ह्यांस मूलचिन्हें म्हणतात. उदाहरण, } \sqrt{\text{क्ष म्हणजे क्षचें वर्गमूळ होय.}}$

$\sqrt{\text{क्ष+य म्हणजे क्ष आणि य ह्यांचे बेरजेचें घनमूळ होय.}}$

२, ३, ४, इत्यादि चिन्हें पदांच्या ओक्यावर मांडलीं असतां तीं त्या पदांचे ते ते घात दाखवितात. उदाहरण,  $\sqrt{\text{क्ष म्हणजे क्षचा वर्ग (म्हणजे दुसरा घात) होय. (क्ष+ज्ञ) किंवा, } \sqrt{\text{क्ष+ज्ञ, म्हणजे क्ष आणि ज्ञ ह्यांचे बेरजेचा चतुर्घात. जर, क्ष=६ आणि ज्ञ=४ धरले, तर (क्ष+ज्ञ)=(६+४)=(१०)=१०००० होतील.}}$

सांगितलेल्या चिन्हांखेरीज आणखी दुसरीं चिन्हे आहेत तीं नुसतींच लिहून दाखवितों. कारण, तीं विवरण केल्याबांचून समजण्याजोगीं आहेत .

ह्याचा अर्थ कारणां,  $\therefore$  ह्याचा अर्थ म्हणून.  $\propto$  ह्याचा अर्थ प्रमाणानें विकार पावणें.  $>$  ह्याचा अर्थ पेक्षां मोठें.  $<$  ह्याचा अर्थ पेक्षां लहान.  $\infty$  ह्याचा अर्थ अनंतत्व. आणि  $\pm$  ह्याचा

प्रथम अधिक किंवा उणे .

उदाहरण १, अ=३, ब=२, आणि क=४, असे  
म्हून पुढील पदांची संख्या काढ .

१, अ + ३ ब + क; ह्यांची संख्या काय होती?

उत्तर, १३

२, ४ अ + २ ब - अक ह्यांची संख्या काय होती?

उत्तर, ४

३, अ + ब (क - अ); ह्यांची संख्या काय होती?

उत्तर, ११

४, ५ (अ + ब - २क); ह्यांची संख्या काय होती?

उत्तर, १५

उदाहरण २, जेव्हा क्ष=४, य=३, ज्ञ=१, आणि  
न=२, आहेत तेव्हा पुढील पदांची संख्या काढ .

१, न (क्ष + य - ज्ञ); ह्यांची संख्या काय होती?

उत्तर, १३

२,  $\frac{क्ष^3 + य^3 - १ज्ञ}{५न + १}$  ह्यांची संख्या काय होती?

उत्तर, २

३,  $\frac{क्ष^3}{६} - \frac{य^3}{३} + न$  ज्ञ; ह्यांची संख्या काय होती?

उत्तर, ७

४, (क्षै-यै)-(क्ष-यै)+न(क्ष-य-ज्ञ);  
त्यांची संख्या काय होती?

उत्तर, ६

(२) ज्या पदांतलीं अक्षरें एकसारखींच असता-  
त त्यांस सरूपपदें म्हणतात. जसें, २ अ, ५ अ;  
३ क्षै, ४ क्षै, आणि अक्षय, २ अक्षय, १० अ-  
क्षय; इत्यादि.

ज्या पदांशीं अक्षरें भिन्न भिन्न असतात, त्यांस  
विरूपपदें म्हणतात. जसें, २ अ, २ ब, ५ अय;

ज्या पदांच्या पूर्वी + हें चिन्ह असतें, किंवा को-  
णतेंही चिन्ह नसतें त्या पदांस धनपदें म्हणतात.

ज्या पदांच्या पूर्वी - हें चिन्ह असतें, त्या पदांस ऋ-  
ण पदें म्हणतात.

एका पुरुषाजबळ २ रुपये आहेत असें मानले  
तर, त्याजबळ वास्तविक २ रुपये आहेत, म्हणून ते + २  
रुपये आहेत, असें म्हणावे. आतां त्यांतील १ रुपया  
त्यामिं खर्चिल्यास त्याजबळ वास्तविक एक रुपया रा-  
हिल्लो तो + १ रुपया असें म्हणावे. पुढें त्यानें तोही रुप-  
या खर्चिल्यास त्याजबळ वास्तविक कांहीं राहिलें नाहीं;

म्हणून त्याजपाशी ० आहे असें म्हणावें.

आतां आपण असें समजूं कीं, त्यानें एक रुपया कर्ज घेतला तर त्याला एक रुपया कर्ज झाला, म्हणून-१ रुपया आहे असें म्हणावें. पुढें त्यानें आणखी एक रुपया कर्ज घेतला अशी कल्पना केल्यास त्यास एकंदर दोन रुपये कर्ज झाले म्हणून त्याजवळ-२ रुपये आहेत असें म्हणावें

(३) बीजगणितांतील प्रत्येक पदास अंकरूप वेढाप्रकाशक असतो. तो कधीं कधीं लिहितात, व कधीं कधीं लिहीत नाहींत. जेथें वेढाप्रकाशक लिहिलेला नसतो तेथें १ हा वेढाप्रकाशक आहे असें समजावें. म्हणून, जसें; ३ घोडे, ५ घोडे, आणि १ घोडा मिळून ९ घोडे होतात; तसें, ३ अ, ५ अ, आणि अ, मिळून ३ अ + ५ अ + १ अ = ९ अ होतात. आणि जसें, धान्याच्या १० गोण्या आहेत त्यांतून एक गोणी काढिली म्हणजे ९ गोण्या राहतात, तसें  $१० \text{ क्ष} - \text{क्ष} = १० \text{ क्ष} - १ \text{ क्ष} = ९ \text{ क्ष}$  होतात.

# बेरीज .

## उदाहरण .

पहिलें, २अ+ब, २अ+२ब, अ+५ब, आ-  
णि ३ब+४अ; त्यांची बेरीज कर .

$$\left. \begin{array}{l} २अ+ब \\ ३अ+२ब \\ अ+५ब \\ ४अ+३ब \end{array} \right\} \begin{array}{l} येथें २अ+३अ+१अ+४अ=१०अ \\ आणि १ब+२ब+५ब+३ब=११ब \\ \therefore \text{एकंदर बेरीज } १०अ+११ब \text{ आहे .} \end{array}$$

१०अ+११ब हें उत्तर .

दुसरें, ३क्ष-२य, ६क्ष+४य, -१क्ष-३य,  
आणि -५क्ष+२य; त्यांची बेरीज कर .

$$\left. \begin{array}{l} ३क्ष-२य \\ ६क्ष+४य \\ -१क्ष-३य \\ -५क्ष-२य \end{array} \right\} \begin{array}{l} येथें ३क्ष+६क्ष-१क्ष-५क्ष=३क्ष-६क्ष=३क्ष \\ आणि ४य-२य-३य-१य=४य-६य=-२य \\ \therefore -६य=-४य-२य, \therefore ४य-६य=४य-४य-२य \\ =०-२य=-२य \end{array}$$

३क्ष-२य हें उत्तर .  $\therefore$  एकंदर बेरीज ३क्ष-२य

तिसरें, ६क्ष-३क्षय+२य, य-४क्ष+क्षय,  
आणि ६क्षय-५य+३क्ष, त्यांची बेरीज कर .

$$\begin{array}{l}
 \text{क्षै}-\text{३क्षय}+\text{२यै} \left\{ \begin{array}{l} \text{येथें क्षै}+\text{३क्षै}-\text{४क्षै}=\text{४क्षै}-\text{४क्षै}=० \\ \text{४क्षै}+\text{क्षय}+\text{यै} \left\{ \begin{array}{l} \text{आणि १क्षय}+\text{१क्षय}-\text{३क्षय}=\text{२क्षय}-\text{३क्षय}=-\text{१क्षय} \\ \text{३क्षै}+\text{क्षय}-\text{५यै} \left\{ \begin{array}{l} \dots \text{२यै}+\text{बै}-\text{५यै}=\text{३यै}-\text{५यै}=-\text{२यै} \end{array} \right. \\ \text{उत्तर, } -\text{क्षय}-\text{२यै} \end{array} \right. \end{array} \right. \therefore \text{एकंदर बेरीज}-\text{क्षय}-\text{२यै}
 \end{array}$$

चवथें, २अ+२ब, अ+३ब, ५अ+ब,  
आणि ८अ+ब. ह्यांची बेरीज कर.

उत्तर, १६अ+७ब.

पांचवें, २क्ष-४य, -३क्ष+य, ६क्ष-५य,  
आणि २य-क्ष, ह्यांची बेरीज कर.

उत्तर, ४क्ष-६य.

साहाबें, २क्षै+क्षय-२यै, ३क्षय-यै  
-४क्षै, ५यै-क्षै-६क्षय, आणि ४क्षै-क्षय+३यै,  
ह्यांची बेरीज कर.

उत्तर, क्षै-३क्षय+५यै

सातवें, अक्षै+बक्षै-कक्ष, २अक्षै+४कक्ष  
-५बक्षै, आणि २यक्षै-अक्षै-८कक्ष, ह्यांची  
बेरीज कर.

उत्तर, २अक्षै-२बक्षै-९कक्ष

आठवें, अ-ब व अ+ब; क्ष+क्षय व क्षय

+यै; आणि यै-क्षज्ञ व क्षज्ञ-ज्ञै; त्यांची बेरीज कर.

उत्तर, २अ; क्षै+२क्षय+यै; आणि यै-ज्ञै.

## वजाबाकी.

(४) समजा कीं, अजवळ ३क्ष रुपये आहेत, व तो ते कधीं खर्चीत नाहीं. आणि बजवळ २क्ष रुपये आहेत, व तो दररोज क्ष रुपये खर्चतो. ह्या उदाहरणांत अर्चापैसा दररोज बऱ्यापैसा किती वाढत चालला हें पाहावयाचें आहे.

	१ दिवस	२ दिवस	३ दिवस	४ दिवस	५ दि०
अर्चापैसा ३क्ष	३क्ष	३क्ष	३क्ष	३क्ष	३क्ष
बर्चापैसा २क्ष	१क्ष	० क्ष	-१क्ष	-२क्ष	
बाकी	१क्ष	२क्ष	३क्ष	४क्ष	५क्ष

ह्या सर्व वाक्या अर्चापैसा दररोज बऱ्यापैसा प्रेक्षां किती अधिक होत चालला हें दाखवितात, व ह्या वजाबाकीनें निघाल्या आहेत; परंतु ज्या रकमा वजा करावयाच्या आहेत, त्यांचीं चिन्हें पाहिल्यानें बदललीं असतां त्याच वाक्या खेरीजेनें ही येतील;

कृणजे,

१दिवस	२दिवस	३दिवस	४दिवस	५दि०
अचापैसा १क्ष	३क्ष	३क्ष	३क्ष	३क्ष
बचापैसा - २क्ष	- १क्ष	- ०क्ष	+ १क्ष	+ २क्ष
बाकी	१क्ष	२क्ष	३क्ष	४क्ष

त्यावरून बीजपदे वजा करण्याचा जो नियम सिद्ध होतो तो लिहितो. तो नियम हा कीं, जीं पदे वजा करावयाचीं असतील त्यांचीं चिन्हे पालटलीं, असें पहिल्यानें मनांत आणून मिळवणीच्या रीतीप्रमाणें उदाहरण करावें.

(९) कोणत्याही पदाच्या पूर्वा-हें चिन्ह असलें कृणजे तें सर्व पद वजा करावयाचें आहे असें समजावें. जसें, अ-(ब+क), ; त्याचा अर्थ असा आहे कीं, (ब+क) हे अ मध्ये वजा करावयाचे आहेत, कृणून अ-(ब+क)=अ-ब-क. तसेंच, अ-(ब-क+ड)=अ-ब+क-ड आणि क्ष-{अ-(ब-क)}=क्ष-{अ-ब+क}=क्ष-अ+ब-क.



## उदाहरणें.

पहिलें, ४ अ-८ ब-२ क ह्यांतून अ+२ ब-५ क  
हें वजा कर.

$$\begin{array}{l} \text{वजाबाकीचे नियमाप्रमाणें,} \\ \left. \begin{array}{l} ४ \text{ अ}-८ \text{ ब}-२ \text{ क} \\ \underline{\text{अ}+२ \text{ ब}-५ \text{ क}} \end{array} \right\} \begin{array}{l} +४ \text{ अ}-१ \text{ अ}=+३ \text{ अ} \\ -८ \text{ ब}-२ \text{ ब}=-१० \text{ ब} \\ -२ \text{ क}+५ \text{ क}=+३ \text{ क} \end{array} \end{array}$$

उत्तर, ३ अ-१० ब+३ क

ताळा. ४ अ-८ ब-२ क

दुसरें, २ मक्ष-३ नक्ष-३ पय+२ ह्यांतून  
५ मक्ष-४ नक्ष+पय+क हें वजा कर.

$$\begin{array}{l} \left. \begin{array}{l} २ \text{ मक्ष}-३ \text{ नक्ष}-३ \text{ पय}+२ \\ \underline{५ \text{ मक्ष}-४ \text{ नक्ष}+ \text{पय}+ \text{क}} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{वजाबाकीचे नियमाप्रमाणें} \\ २ \text{ मक्ष}-५ \text{ मक्ष}=-३ \text{ मक्ष} \\ -३ \text{ नक्ष}+४ \text{ नक्ष}=+१ \text{ नक्ष} \\ -३ \text{ पय}-१ \text{ पय}=-४ \text{ पय} \end{array} \end{array}$$

उ०-३ मक्ष+३ नक्ष-४ पय+२ क आणि र-क=र-क

तिसरें, ६ अ+२ ब-(३ अ+ब) ह्यांतून  
२ अ+४ ब-(४ अ-ब) हें वजा कर.

६अ+२ब-३अ-ब	$\left\{ \begin{array}{l} \text{येथें-(३अ+ब) आणि-(४अ-ब)} \\ \text{हे निहावयाच्या वेळेस कोंसाच्या} \\ \text{बाहेर उणेंचिन्ह आहे म्हणून आंती-} \\ \text{लपदांचीं चिन्हें पहिल्यानें बदलावीं.} \end{array} \right.$
२अ+४ब-४अ+ब	
४अ-२ब+अ-२ब=	
५अ-४ब. हें उत्तर.	

चवथें, ५ अ-६ ब-३ क त्यांतून २अ+३ब-७क  
हे वजा कर.

उत्तर, ३अ-९ब+४ क.

पांचवें, ६अ-६अय त्यांतून ६अय-ये हे वजा कर आ-  
णि अ+ब त्यांतून अ-ब हे वजा कर.

उत्तर. ६अ-२अय+ये आणि २ ब.

साहाबें, ५ नै+न-२ त्यांतून ४नै-३न-२ हे वजा-  
कर.

उत्तर, नै+४न-१.

सातवें, अयै-७अैय-अ-क त्यांतून+२अयै  
-२अैय+अ-ब हे वजा कर.

उत्तर, -२अयै-५अैय-२अ-क+ब.

आठवें, अै-अैब+२अबै-बै त्यांतून २अैब  
-अबै हे वजा कर.

उत्तर, अै-३अैब+३अबै-बै.

## गुणाकार .

(६) ३+२ ह्यांस ४ ह्यांनीं गुण .

$$३+२=५ \text{ आणि } ५ \times ४=२० \text{ हें उत्तर}$$

अथवा प्रकारांत गनें

$$(३+२) \times ४ = ३ \times ४ + २ \times ४ = १२ + ८ = २० \text{ हें उत्तर .}$$

अ+ब ह्यांस ड आणि क ह्यांनीं गुणून त्या दोन्ही गुणाकारांची बेरीज कर .

$$(अ+ब) \times क = अक + बक$$

$$(अ+ब) \times ड = \underline{अड + बड}$$

$$अक + बक + अड + बड \text{ हें उत्तर}$$

ही गुणाकारांची बेरीज व अ+ब ह्यांस क+ड ह्यांनीं गुणिल्यास जो गुणाकार येतो तो त्या दोहोंत भेद नाही; म्हणजे,

$$अ + ब$$

$$\underline{क + ड}$$

$$अक + बक$$

$$+ अड + बड$$

$$\underline{अक + बक + अड + बड}$$

येथें अ+ब ह्यांस पहिल्यानें कनें गुणिलें, आणि

मगडुनें गुणिलें, नंतर त्या दोन्ही गुणाकारांची बेरीज घेतली.

५-३ ह्यांस ६ ह्यांनीं गुण.

५-३ = २ आणि २ × ६ = १२ हें उत्तर.

अथवा (५-३) × ६ = ५ × ६ - ३ × ६ = ३० - १८ = १२ हें उत्तर.

अ+ब ह्यांस क आणि ड ह्यांनीं गुण, आणि प-हिल्या गुणाकारांतून दुसरा गुणाकार वजा कर.

(अ-ब) × क = अक-बक

(अ-ब) × ड = अड-बड

अक-बक-अड+बड हें उत्तर

ही बाकी अ-ब आणि क-ड ह्यांच्या गुणाकाराबरोबर आहे; म्हणजे.

अ-ब

क-ड

अक-बक

-अड+बड

अक-बक-अड+बड

येथें अ-ब ह्यांस पहिल्यानें कनें गुणिलें आणि मगडुनें गुणिलें, नंतर त्या दोन्ही गुणाकारांची बेरीज घेतली.

ह्या उदाहरणाचा विचार करून पाहिला असतां  
 लागलेच लक्षांत येते की, + ह्यास + ह्यानें गुणिलें असतां  
 गुणाकार + येतो; - ह्यास - ह्यानें गुणिलें असतां गुणाका-  
 र + येतो; + ह्यास - ह्यानें किंवा - ह्यास + ह्यानें गुणिलें  
 असतां गुणाकार - येतो; म्हणजे असा नियम निघतो की,  
 सरूप चिन्हांचा गुणाकार + येतो आणि विरूप चि-  
 न्हांचा गुणाकार - येतो.

२क्ष ह्यांस ३ ह्यांनीं गुण.

$$२क्ष \times ३ = २क्षची तिप्पट = २क्ष + २क्ष + २क्ष = ६क्ष$$

$$\text{अथवा, } २ \times ३क्ष = ६क्ष.$$

२ ह्या वेळाप्रकाशकास ३ ह्या गुणाकारनें गुणून त्या  
 गुणाकारापुढें क्ष लिहिला म्हणजे वरलें उत्तर येईल.

५अ ह्यांस २ ब ह्यांनीं गुण.

$$५ \times अ \times २ \times ब = ५ \times २ \times अ \times ब = १० अब.$$

५ आणि ३ ह्या वेळाप्रकाशकांच्या गुणाकारापुढें  
 अ आणि ब हीं अक्षरे लिहावीं म्हणजे वरलें उत्तर येईल.

अ ह्यास अ ह्यानें गुण.

$$अ = अ \times अ, \text{ आणि } अ = अ \times अ \times अ.$$

$$\therefore अ < अ = अ \times अ \times अ \times अ \times अ = अ^५.$$

अथवा,  $\text{अ}^३ \times \text{अ}^३ = \text{अ}^{३+३} = \text{अ}^६$ .

२ आणि ३ ह्या घातप्रकाशकांची बेरीज अप-  
राच्या घातप्रकाशकाच्या स्थानी लिहावी, म्हणजे वरले  
उत्तर येईल.

जेथे घातप्रकाशक लिहिला नाही, तेथे १ हा घा-  
तप्रकाशक आहे असे समजावे. जसे,  $\text{अ} = \text{अ}^१$ .

ह्या वरून गुणाकाराचे जे सामान्य नियम  
सिद्ध होतात ते खाली लिहितां.

गुण्यगुणकपदांचीं चिन्हें सरूप असतील  
तर गुणाकारास + चिन्ह लिहावे; व तीं विरूप असतील  
तर - चिन्ह लिहावे. गुण्यगुणकपदांच्या वेळाप्रकाशकां-  
चा गुणाकार घ्यावा. गुण्यगुणकपदांत एकच अक्षर  
असेल तर, त्यांच्या घातप्रकाशकांची बेरीज घ्यावी.

उदाहरणे.

पहिलें. ३अ<sup>३</sup> - ५अब + २ब<sup>२</sup> ह्यांस अ<sup>३</sup> -  
७ अब ह्यांनीं गुण.

३अ<sup>३</sup> - ५अब + २ब<sup>२</sup>

अ<sup>३</sup> - ७अब

३अ-१अब+२अबै

-२१अब+३१अबै-१४अबै

३अ-२६अब+३७अबै-१४अबै हैंउत्तर.

दुसरे. अ-अब+अबै ह्यास अ-ब

ह्यानीं गूण.

अ-अब+अबै

अ-ब

अ-अब+अबै

-अब+अबै-अबै

अ-२अब+अबै+अबै-अबै  
हैंउत्तर.

तिसरे. ६अ ह्यास ४ ह्यानीं; ३अ ह्यास १ब  
ह्यानीं; आणि ६अ ह्यास ६अ ह्यानें गूण.

उत्तर. २४अ; १९अब; आणि ६अ.

चवथें. २क्ष-४य+ ३ ह्यास २क्ष ह्यानीं; आ-  
णि अ+२अब-बै ह्यास अबै ह्यानीं गूण.

उत्तर. ६क्ष-१२क्षय+३क्ष; आणि अबै+२अबै-अबै.

पांचवें. क्ष-क्षय+क्षय-य ह्यास क्ष+य ह्यानीं;

आणि अ+ब+क+अब-अक+बक ह्यांसअ-ब  
+ क ह्यांनीं गूण.

उत्तर. क्ष-य, आणि अ-ब+क+अबक  
साहाबें. १ क्ष+४ क्ष+३ क्ष+२ ह्यांस १ क्ष<sup>२</sup>  
-४ क्ष ह्यांनीं; आणि १-क्ष+क्ष-क्ष ह्यांस १+क्ष  
+क्ष+क्ष ह्यांनीं गूण.

उत्तर. २१ क्ष-क्ष-२ क्ष-८ क्ष; आणि १-क्ष<sup>२</sup>  
सातवें. अ+ब ह्यांस अ+ब ह्यांनीं, अ-ब  
ह्यांस अ-ब ह्यांनीं, आणि अ+ब ह्यांस अ-ब ह्यांनीं  
गूण; आणि तीं उत्तरे लक्ष्यांत ठेव.

$$\text{उत्तर. } \begin{cases} (अ+ब)(अ+ब) = अ^२ + २अब + ब^२; \\ (अ-ब)(अ-ब) = अ^२ - २अब + ब^२; \\ \text{आणि } (अ+ब)(अ-ब) = अ^२ - ब^२. \end{cases}$$

ह्या उदाहरणावरून खालचे नियम निघतात.

१. कोणत्याही दोन संख्यांचे बेरजेचा वर्ग, त्या  
दोन संख्यांच्या वर्गांची बेरीज त्यांच्या गुणाका-  
राच्या दुपटींत मिळवून जे येते, त्या बरोबर आहे.

२. कोणत्याही दोन संख्यांच्या वजाबाकीचा वर्ग,  
त्या संख्यांच्या वर्गांच्या बेरजेत त्यांच्या गुणाकारा-



ची दुष्यट वजा देऊन बाकी जी राहते, तीब-  
रोबर आहे

३. कौणत्याही दोन संख्यांच्या बेरजेचा व व-  
जाबाकीचा गुणाकार त्याच्या वर्गाच्या वजा-  
बाकीबरोबर आहे.

विद्यार्थ्यांनी त्या तीन नियमांची चांगली आखण घ्यावी.

### भागाकार

(१७) भागाकार गुणाकाराची विपरीतक्रिया आहे

$\therefore २६४ \times ३ = ७९२ \therefore ७९२ \div ३ = २६४$ , अथवा  $\frac{७९२}{३} = २६४$ ; आणि  $-१२५ \times ४२५ = -५३१२५$ ;  $\therefore \frac{-५३१२५}{४२५} = -१२५$ .

त्यावरून भागाकाराचा नियम सादर होतो;  
तो हा की, भाज्यभाजकांची चिन्हे सरूप असल्यास  
भागाकारास + चिन्ह लिहावे; तीं चिन्हे विरूप अ-  
सल्यास - चिन्ह लिहावे; भाज्याच्या वेळाप्रकाशका-  
स भाजकाच्या वेळाप्रकाशकानें भागावे; आणि भाज्य-  
भाजकपदांत एकच अक्षर असल्यास भाज्याच्या घातप्र-  
काशकांत भाजकाचा घातप्रकाशक वजा करावा.

## उदाहरणें

पहिलें.-१० अँ ब कँ ह्यांस-३ अँ ब कँ ह्यांनीं  
भाग.

$$\frac{-१०अँ ब कँ}{-३अँ ब कँ} = ६ अँ कँ हें उत्तर.$$

ह्या उदाहरणांत चिन्हें सरूप आहेत म्हणून भागाकाराचें चिन्ह + समजावें; ३ हे १० रांतून ६ वेळा जातात; २ हा घातप्रकाशाक ३ ह्यांत वजा केल्यास भागाकारांतल्या अ स १ हा घातप्रकाशाक उरतो; व हा भाज्यांकांत आणि भाजकांत आहे, म्हणून तो भागाकारांत आला नाही, कारण,  $\frac{व}{व} = १$  आहे; आणि ३ हा घातप्रकाशाक पांचांतून वजा केल्यामुळे भागाकारांत क म २ घातप्रकाशाक उरतो.

दुसरें. १२ अँ क्षै यँ-२४ अक्षै यँ-१० क्षै य  
+ ६ क्षय ह्यांस-६ क्षय ह्यांनीं भाग.

$$\frac{१२अँ क्षै यँ-२४ अक्षै यँ-१० क्षै य + ६ क्षय}{-६ क्षय} =$$

$$-२अँ क्षै य + ४ अक्षै य + ३ क्ष-१ हें उत्तर$$

तिसरें . २ अँ-७ अँब+७ अँबे+अँबे  
 -१५ अँबे ह्यांस २ अँ-३ अँब-५ अँबे ह्यांनीं भाग .

२ अँ	२ अँ-७ अँब+७ अँबे+अँबे-१५ अँबे	अँ
-३ अँब	२ अँ-३ अँब-५ अँबे	-२ अँब
-५ अँबे	-४ अँब+१२ अँबे+अँबे	+३ अँबे
	-४ अँब+६ अँबे+१० अँबे	
	६ अँबे-९ अँबे-१५ अँबे	
	६ अँबे-९ अँबे-१५ अँबे	

चवथें १ ह्यांस १+२ क्ष+क्ष ह्यांनीं भाग .

१+२ क्ष+क्ष) १	(१-२ क्ष+३ क्ष-४ क्ष+ इत्या-
<u>१+२ क्ष+क्ष</u>	दिअनंत पर्यंत .
-२ क्ष-क्ष	
<u>-२ क्ष-४ क्ष-२ क्ष</u>	
३ क्ष+२ क्ष	
<u>३ क्ष-६ क्ष+३ क्ष</u>	
-४ क्ष-३ क्ष	

पांचवें . अँ<sup>न+१</sup>-अँ<sup>न+१</sup>-अँ+अँ<sup>१</sup> ह्यांस अँ<sup>न-१</sup>  
 ह्यांनीं भाग .

$$\frac{अ^{n+1}-अ^{n+1}अ+अ^{n-1}}{अ^{n+1}} = अ^{n+2}-अ^{n+1}अ+१$$

ह्या भागाकारांत जे घातप्रकाशक आले आहेत ते वजाबाकीने आले आहेत; म्हणजे,

$$\begin{array}{cccc} २न+१ & न+१ & न & न-१ \\ \frac{न-१}{न+१} & \frac{न-१}{२} & \frac{न-१}{१} & \frac{न-१}{०} \end{array}$$

ह्या उदाहरणावरून हे उघड आहे कीं,  $अ^०=१$

$$\therefore \frac{अ^{n-1}}{अ^{n-1}} = अ^०; परंतु अ^{n-1} \div अ^{n-1} = १ \therefore अ^० = १$$

साहाबें. १० अ ह्यांस २ ह्यांनीं; -१२ अक्ष ह्यांस ४ अ ह्यांनीं; २० क्षेय ह्यांस -४ क्षय ह्यांनीं; आणि -१२० यै ह्यांस -१० अक्षे यै ह्यांनीं भाग

उत्तर. ५ अ; -३ क्ष; -४ क्षेय; आणि १२ अक्षे यै

सातवें. ३ अबै - ६ अबै + १२ अबैक ह्यांस ३ अबै ह्यांनीं; आणि ८ क्षेय - १२ क्षे - १६ क्ष ह्यांस ४ क्ष ह्यांनीं भाग

उत्तर. अ - २ अबै + ४ बैक; आणि २ क्षेय - ३ क्ष - ४

आठवें.  $\frac{२अक्षय-५क्षय}{क्षय}$ ;  $\frac{६बैय+४अवय-१०वय}{-वय}$

आणि  $\frac{४अवक्ष-३अक्ष+७अकक्ष}{अक्ष}$

उत्तर. २अ-५; ६ब-४अ+१०; आणि ४व-३अ+७क

नववें. ८क्षै+१६अक्ष+६अै ह्यांस ४१; २अ ह्यांनीं; आणि क्षै+क्षैय+क्षयै+यै ह्यांस क्षै+२क्षय+यै ह्यांनीं भाग.

उत्तर. २क्षै+३अ; आणि क्षै-क्षय+यै

दाहावें. ८क्षैय+२क्षैय-२क्षै+३क्षैय+क्षह्यांस ४क्षैय+३क्षय-१ ह्यांनीं; आणि क्षै-यै ह्यांस क्ष-य ह्यांनीं भाग.

उत्तर. २क्षै-क्ष; आणि क्षै-क्षैय+क्षयै-यै

अकरावें. १८क्षै-३३क्षै+४४क्ष-३५ ह्यांस ६क्ष-७ ह्यांनीं; आणि १-क्ष ह्यांस १+क्ष ह्यांनीं भाग.

उत्तर. ३क्षै-२क्ष+५; आणि १-२क्ष+२क्षै-२क्षै+३०

बारावें.  $\frac{अ+२अबै+बै}{अ+बै}$ ;  $\frac{क्षै-२क्षैयै+यै}{क्षै-यै}$

उत्तर. अ+बै; क्षै-यै.

$$\text{तेरावें. } \frac{\text{अ}^{\text{म}} \text{ब}^{\text{म}+२} - \text{अ}^{\text{म}+१} \text{ब}^{\text{म}+१} + \text{अ}^{\text{म}+२} \text{ब}^{\text{म}}}{\text{अ}^{\text{म}-२} \text{ब}^{\text{म}}};$$

आणि  $\frac{४\text{अ}-१}{२\text{अ}+१}$

उत्तर.  $\text{अ}^३\text{ब}^३ - \text{अ}^२\text{ब}^२ + \text{अ}\text{ब}^१; २\text{अ}-१$

अनेकप्रकारचीं उदाहरणे.

पहिलें.  $\text{क्ष}=४, \text{य}=२, \text{आणि } \text{ज्ञ}=६$  धरून  
वालच्या तीन पदांच्या संख्या काढ.

(१)  $\text{क्ष}^३ + ४\text{य} - ३\text{ज्ञ}$ . (२)  $\frac{\text{क्ष} + ४\text{य}}{१३} - \frac{\text{ज्ञ}}{\text{य}}$

(३)  $\frac{\text{क्ष}(\text{ज्ञ}-\text{य})}{३} + \frac{\text{ज्ञ}}{\text{क्ष}-\text{य}}$ .

दुसरें.  $१\text{अ}^३\text{ब}-२\text{अ}^२\text{ब}^२-३\text{अ}\text{ब}^३; २\text{अ}^३\text{ब}^३$   
 $-७\text{अ}^२\text{ब}^२+५\text{अ}\text{ब}^३; \text{आणि } \text{अ}^३\text{ब}^३-\text{अ}^२\text{ब}^२; \text{ह्यांची}$   
बेरीज कर.

तिसरें.  $२\text{क्ष}^३-३\text{क्ष}^२+८\text{क्ष}-५$  हे  $५\text{क्ष}^३-\text{क्ष}^२-२\text{क्ष}$   
 $+१$  ह्यांत वजा कर.

चवथें.  $४\text{अ}^३\text{क्ष}-७\text{अ}^२\text{क्ष}-३\text{अ}$  ह्यांस  $२\text{अ}^३\text{क्ष}$   
 $-७\text{अ}^२\text{क्ष}$  ह्यांनी; आणि  $\text{अ}^३+\text{अ}\text{ब}+\text{ब}^३$  ह्यांस  $\text{अ}-\text{ब}$  ह्यां-  
नीं गुण.

पांचवें. क्षै+क्षयै+यै त्यांस क्षै+क्षय+यै  
त्यांनीं; आणि क्षै+यै त्यांस क्ष+य त्यांनीं भाग.

साहायें. अ अक्ष-क्ष+क्ष, ५ अ अक्ष  
+३ ब+क्ष, २ ब+क्ष-७ अ अक्ष, आणि ३ अ अक्ष+  
४ ब+क्ष, त्यांची वेगीत कर; आणि (३ अ-क्ष) क्ष  
त्यातून (अ+२ क्ष) क्ष होवता कर.

सातवें. अक्षै-क्षै; अक्षै+अक्ष+क्षै; क्षै-१,  
४ अक्षै-१ वक्षै; क्षै-२ वक्ष+२ वक्ष; आणि अक्षै-वक्षै; त्या-  
तील प्रत्येकाचीं गुण्यगुणकपदें लिहून दाखवाव.

आठवें. अक्षै-(अक्षै+वक्षै+यै त्यांस अक्ष-  
-वक्ष त्यांनीं भाग; आणि पक्षै+कक्ष-र त्यांस मक्ष-  
-न त्यांनीं गूण.

नववें. अक्षै-अक्ष; मन-मक्ष; अबक्षै-अक्ष; -वक्षै  
+ बक्षै-बक्षै; आणि -कक्षै-वक्षै-क्ष त्यांतील  
प्रत्येकाचीं गुण्यगुणकपदें लिहून दाखवाव.

दाहायें. मन (म+न); क्षय (क्ष-य);  
(प+र) (प-र); -(र+अव) क्ष; आणि  
क्ष+ (क्ष-१) य, त्यांचे कोंस उडवून दाखवाव.

## समीकरणे

(८) जेहां दोन पदे किंवा पदांचे दोन समूह पर-  
स्परान्या बरोबर असतात तेव्हां त्यांचें समीकरण हो-  
तें. असें,  $४ \times ३ = १२ + ५$  हें समीकरण होय, आणि  
 $१० \times ६ = ६०$  हेंही समीकरण आहे, ज्यांत क्षची किंमत  
 $६$  आहे हें उघड आहे, कारण  $१० \times ६ = ६०$  आहेत ;  
आणि जर समीकरणाच्या दोहों वा त्रुंस  $१०$  ह्यांनी भागिलें  
तर  $क्ष = ६$  येतील. पुनः  $६ + ५ = ११$  हें जर एक स-  
मीकरण घेतलें आणि त्याच्या दोनही बाजूंतून  $५$  वजा-  
केले तर  $क्ष = १०$  येतील. आणि  $क्ष - ५ = २०$  असें जर  
एक समीकरण घेतलें व त्याचे दोनही बाजूंत  $५$  मिळ-  
विले तर  $क्ष = २५$  येतील. असेंच जर,  $\frac{१}{२} क्ष = २$  हें  
एक समीकरण घेतलें तर क्षची किंमत  $४$  येईल, का-  
रण ती  $४$  चा चवथा हिस्सा  $२$  आहे, आणि जर समीक-  
रणाच्या दोनही बाजूंस  $४$  नीं गुणिलें तर  $क्ष = ८$  ये-  
तील.

$क्ष + २अ = ८अ - २क्ष$  असें एक दिलेलें स-  
मीकरण आहे.



ह्या समीकरणाच्या दोन्ही बाजूंत  $२क्ष$  मिळविल्यानें,

$$क्ष + २क्ष + २अ = ८अ .$$

ह्याचे दोन्ही बाजूंतून  $२अ$  वजा केल्यानें,

$$क्ष + २क्ष = ८अ - २अ .$$

मूळ समीकरणाची आणि ह्याची तुलना करून पाहिलें असतां असें दिसतें कीं,  $२क्ष$  आणि  $२अ$  ह्यांचीं चिन्हे बदलून त्यांस स्थळांतर केलें, म्हणजे त्यांस एका बाजूंतून काढून दुसऱ्या बाजूंस नेलें.

$$\text{आतां } \therefore क्ष + २क्ष = ३क्ष, \text{ आणि } ८अ - २अ = ६अ,$$

$$\therefore ३क्ष = ६अ .$$

ह्या समीकरणाने प्रत्येक बाजूस ३ ह्यांनी भागल्यानें,

$$क्ष = २अ \text{ येतात, ही क्ष अव्यक्तपदाची किंमत होय .}$$

ह्यावरून असें दिसतें कीं, समीकरणांत कोणत्याही पदाचें चिन्ह बदलून स्थळांतर केलें असतां चिन्हा नही, आणि समीकरणाच्या एके बाजूंत जो फार फेर करावा तोच समानता राखण्याकरितां दुसऱ्या बाजूंत केला पाहिजे .

## हीं पुढील समीकरणे सोडवीव.

१.  $क्ष + ३ = १८ - ४क्ष$  उत्तर.  $क्ष = ३$ .
२.  $क्ष + ३अ = १८अ - ४क्ष$  उत्तर.  $क्ष = ३अ$ .
३.  $४क्ष - ३अ = ३क्ष + ३ब$  उत्तर.  $क्ष = ३(अ + ब)$
४.  $७ + ६क्ष - ४ = १२ + ३क्ष$  उत्तर.  $क्ष = ३$ .
५.  $४(क्ष - २) = १०क्ष - ३८$  उत्तर.  $क्ष = ९$ .
६.  $अक्ष + क = अ - बक्ष$  उत्तर.  $क्ष = \frac{अ - क}{अ + ब}$ .
७.  $\frac{य}{१२} - ८ = - ६$  उत्तर.  $य = २४$ .
८.  $५अज्ञ - १ = ३अ(ज्ञ + ब)$  उत्तर.  $ज्ञ = \frac{५अब + १}{३अ}$ .

## प्रश्न.

१. एके मनुष्याने २१ रुपयांस बांसरासुद्धां एक गाय विकत घेतली, व त्यांत गाईची किंमत बांसराच्या साहा पट होती, तर एकेकाची किंमत काय?

बांसराची किंमत दाखवायास क्षरुपये घे;

तर  $\therefore$  गाईची किंमत बांसराचे साहा पट आहे,

$\therefore$  ६ क्ष ही तिची किंमत आहे.

परंतु, प्रभाप्रमाणे गाईची किंमत + बांसराची किंमत = २१ रुपये आहेत.

$$\therefore ६ \text{ क्ष} + ११ = २१$$

$$\text{म्हणजे, } ७ \text{ क्ष} = २१$$

$$\therefore १ \text{ क्ष} = ३ \text{ रुपये} = \text{बांसगची किंमत}$$

$$\text{आणि } ६ \text{ क्ष} = १८ \text{ रुपये} = \text{गाईची} \dots\dots$$

२. अजबळ १०० रुपये होते आणि वीस जवळ ४० रुपये होते; वीसने काही पैसा लोकांस वाटल्या, आणि अनेक त्याच्या दुपट वाटल्या, आणि मग अजबळ लवच्या निपट पैसे गाहिले. तर एककांने किती किती पैसा वाटला ?

$$\text{वीसने जे रुपये वांटले ते} = ६ \text{ रुपये}$$

$$\text{तर अनेक} \dots\dots\dots = ११ \text{ क्ष}.$$

आतां प्रत्येकाच्या पैसा - त्यांनी जितका पैसा वाटला तो = त्याजवळ जी बाकी राहिली ती.

$$\therefore १०० - ११ \text{ क्ष} = \text{अजबळची बाकी},$$

$$\text{आणि } ४० - ६ \text{ क्ष} = \text{व} \dots\dots\dots$$

परंतु प्रश्नांत सांगितलें आहे कीं, अर्बी शिल्लक वीसच्या शिल्लकेच्या निपट आहे.

$$\therefore १०० - ११ \text{ क्ष} = ३(४० - ६ \text{ क्ष}) = १४४ - १८ \text{ क्ष},$$

$$\text{स्थळान्तराबें, } ११ \text{ क्ष} - १८ \text{ क्ष} = १४४ - १००;$$

महणजे, क्ष = ४४ रुपये = बनें पांढलेला पैसा,

आणि २ क्ष = ८८ रुपये = अने .....

३. अ, ब, आणि क, ह्या तिघांम ६०० रुपये वांटून दे, ते असे कीं, अच्या हिशाच्या दुप्पट बस मिळतील, आणि अ आणि ब ह्या दोघांच्या हिशांचे बेरजेबरोबर क स मिळतील.

उत्तर. अ १०० रुपये, ब २०० रुपये आणि क ३०० रुपये.

४. अशा दोन संख्येच्या काढ कीं, ज्यांची वजाबाकी ७ असावी, आणि मोठ्या संख्येच्या तिपटीची आणि धाकट्या संख्येच्या आठपटीची वजाबाकी ६ असावी.

उत्तर. १० आणि ७

५. एक मजूर आणि त्याचा मुलगा हे दोघे मिळून ९६ रुपये मिळवितात, परंतु मजुरास मुलाच्या पांचपट मिळतात; तेव्हां एकेक किती किती मिळवितो ?

उत्तर. मजूर ८० रुपये, मुल १६ रुपये.

६. लोखंडी सडक बांधायाच्या कामांत अ आणि ब ह्या दोहों मनुष्यांनीं सारखा पैसा घातला; त्यांत अ म १०० रुपये नफा झाला, आणि ब म ४९ रुपये तोटा झाला, नंतर पाहातात तों बच्या साहाय्यत पैसा

अजवळ झाला, तेव्हा एकेकानें किती किती पैसा घातला?

उत्तर . ६०० रुपये.

७. अफूट लांबीची एक दोरी आहे तिचे असे दोन तुकडे करायचे आहेत कीं . एक तुकडा दुसऱ्या तुकड्याच्या लांबीच्या बऱ पट लांब होईल, तेव्हा एकेका तुकड्याची लांबी किती?

$$\text{उत्तर. } \begin{cases} \text{धाकटा तुकडा} = \frac{अ}{२+१} \text{ फूट,} \\ \text{आणि मोठा तुकडा} = \frac{अ+१}{२+१} \text{ फूट} \end{cases}$$

जेव्हा  $अ=२०$  आणि  $ब=४$  तेव्हा त्या तुकड्यांची लांबी किती आहे ?

उत्तर ४ आणि १६

## प्रकरण २

### अपूर्णबीजपद

(९) बीजांतील अपूर्ण पदे आणि अंकगणितांतील अपूर्णांक त्यांचें स्वरूप एकच आहे, म्हणून एकास जे नियम लागू पडतात तेच दुसऱ्यासही लागू पडतात . असें समज कीं, एका नारिंगाच्या फळाचे बऱ संख्ये इतके सारखे तुकडे करून त्यांपैकीं

अ तुकडे घ्याबयाचे आहेत तर ते तुकडे, त्याचे आठ सारखे तुकडे करून त्यांपैकीं पांच तुकडे घ्याबयाचे असले म्हणजे ते जसे  $\frac{5}{8}$  त्या अपूर्णसंख्येने दाखवितों, तसेंच  $\frac{3}{4}$  त्या अपूर्णपदाने दाखवितों.

∴  $\frac{अ}{ब}$  हे अपूर्णपद अस बनें भागून जो भागाकार येतो तो दाखवितें, आणि भागाकार × भाजक = भाज्य

$$\frac{अ}{ब} \times ब = अ :$$

म्हणजे, जर आपण एखाद्या अपूर्णपदास त्याचे छेदानें गुणिलें, तर आपणास त्या पदाचा अंश कळतो.

बरील समीकरणाच्या दोन्ही बाजूंस ननें गुण, तर

$$नब \times \frac{अ}{ब} = नअ$$

$$\therefore \frac{अ}{ब} = \frac{नअ}{नब} ;$$

म्हणजे, कोणत्याही अपूर्णपदाचे अंश आणि छेद ह्यांस एकाच पदाने गुणिलें असतां त्याची किंमत बदलत नाही.

कुरलरी :  $\therefore \frac{नअ}{नब} = \frac{अ}{ब}$  ,  $\therefore$  कोणत्याही अपूर्णपदाचे अंशास आणि छेदास एकाच संख्येने भागिले असता त्याची किंमत बदलत नाही.

### उदाहरणे .

१.  $\frac{१५}{३}$  ह्यांस २ ह्यांनी :  $\frac{१५}{३}$  ह्यांस १२ ह्यांनी :  $\frac{२५}{५}$  ह्यांस १५ ह्यांनी : आणि  $\frac{२५}{५}$  ह्यांस ५ ह्यांनी गुण .

$\frac{१५}{३} \times २ = १०$  ,  $\therefore$  कोणत्याही वस्तूच्या अर्धाची दुप्पट = ती सर्व वस्तू .

$\frac{१५}{३} \times १२ = ६०$  ,  $\therefore$  कोणत्याही वस्तूच्या तृतीयांशाची १२ पट = १२ व तीयांश = त्या वस्तूची ४ पट .  
ह्याच रून असे दिशने की , आपणास कोणत्याही अपूर्णपदास एकाद्या संख्येने गुणयाचे आहे तर गुणयाचे पूर्वी त्या संख्येस अपूर्णपदाचे छेदाने (जर विशेष भागितां येईल तर ) भागिले असता चिंता नाही .

$\frac{२५}{५} \times १५ = ६५$  ,  $\therefore$  ५ शांची १५ पट =  $\frac{३०}{५} = ६$  ,  
अथवा  $\therefore १५ \div ५ = ३$  , आणि  $२५ \times ३ = ६५$  .

$\frac{३५}{५} \times ५१ = \frac{१७५५}{५}$  ,  $\therefore$  ५ शांची ५ पट =  $\frac{१५}{५}$  ,  
आणि  $५ \times १५ = ६५$  .

२.  $\frac{१५}{३} + \frac{३१५}{५} - \frac{५१५}{६} + \frac{३१५}{८} - \frac{७१५}{१२}$  ह्यांस २४  
ह्यांनीं गूण, आणि त्या गुणाकाराची बेरीज घे.

उत्तर. ८१५ + १८१५ - २०१५ + ०१५ - १४१५ = १५.

३.  $\frac{३५}{२} - \frac{२५}{५} - \frac{५}{४} + \frac{७५}{१०} - \frac{९५}{४}$  ह्यांस २०  
ह्यांनीं गूण, आणि त्या गुणाकारांची बेरीज घे.

उत्तर. ६५.

४.  $\frac{४}{१५} - \frac{७}{२१५} + \frac{३}{८१५} - \frac{९}{४१५} + \frac{३}{२}$  ह्यांस ८१५.  
ह्यांनीं गूण, आणि त्या गुणाकारांची बेरीज घे.

उत्तर. १२१५ - ११.

५.  $\frac{१५}{५} + \frac{५}{१५} - \frac{१५}{१०} - \frac{३}{१५} + ३$  ह्यांस १० १५ ह्यांनीं  
गूण.

उत्तर. १५ + ३० १५ + ५० १५ - २०.

ही उदाहरणां केल्याने विद्यार्थ्यांस समीकरणां  
चे छंद सांडविता येतील.

## दृढभाजक.

(१०) कोणत्याही पदाचा भाजक तोच होय कीं ज्यानें

+ येथें भाजक हा शब्द बराबर नाही, कारण, ह्याचा अर्थ  
ज्यानें आपण भागलों तो इतकाच आहे, म्हणून सामान्य सोप्या किं-  
वा दुसरा कांहीं तरी बरील अर्थसूचक शब्द असावा; परंतु हा शब्द  
कार दिवस प्रचारांत आहे म्हणून तोच येथें घेतला आहे.



त्या पदास भागिलें असतां भागाकार निःशेष येतो. जसें, २ हा २ अचा भाजक आहे; अक्ष हा अक्ष<sup>२</sup> ह्याचा भाजक आहे; अ + ब हा (अ + ब) अ ह्याचा भाजक आहे.

दोन किंवा अधिक पदांचा सामान्य भाजक तोच होय, कीं ज्यानें त्या पदास भागिलें असतां भागाकार निःशेष येतो, आणि त्याचा दृढ भाजक तोच होय कीं, जो त्याच्या सामान्य भाजका मध्ये प्रतिमोटा असता. जसें, अ हा २ अ, ४ अक्ष आणि ४ अक्ष<sup>२</sup> ह्यांचा सामान्य भाजक आहे, आणि त्याचा दृढभाजक २ अ हा आहे असेच, ४ (अ + ब) हा ६ (अ + ब), ९ (अ - ब), आणि १२ (अ - ब) ह्यांचा दृढभाजक आहे, कारण ६ (अ + ब) = ६ (अ + ब) (अ + ब), ९ (अ - ब) = ९ (अ + ब) (अ - ब), आणि १२ (अ - ब) = १२ (अ + ब) (अ - ब + ब); येथें ३ (अ + ब) हा दृढभाजक आहे, हें उघडच आहे.

२. ह्या प्रकारें पदांचे निरनिराळे तुकडे करण्याची रीति विद्यार्थ्यांस त्या पदांच्या दृढभाजक काढण्यास फार

उपयोगी पडते

## उदाहरणें.

१.  $x^3 + 2x - 3$  आणि  $x^3 + 4x + 6$  त्यांचा दृढ-  
भाजक काढू.

$$\begin{aligned} x^3 + 2x - 3 &= x^3 + 3x - x - 3 = (x+3)x - (x+3) \\ &= (x-1)(x+3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x^3 + 4x + 6 &= x^3 + 3x + x + 6 = x(x+3) + 2(x+3) \\ &= (x+2)(x+3) \end{aligned}$$

∴  $x+3$  हा त्यांचा दृढभाजक आहे.

$x^3 + 2x - 3$  आणि  $x^3 + 4x + 6$  हीं जर एका-  
द्या अपूर्णपदाचीं अंशलेखात्मक पदें असतील तर त्यां-  
च्या अंशास आणि छेदाम् त्यांच्या  $x+3$  ह्या दृढभाज-  
कांनं भागिलें असतां त्या अपूर्णपदास अतिसंक्षेप-  
रूप देतां येईल ; म्हणजे,

$$\frac{x^3 + 2x - 3}{x^3 + 4x + 6} = \frac{(x+3)(x-1)}{(x+3)(x+2)} = \frac{x-1}{x+2}$$

= ह्या अपूर्णपदाचें अतिसंक्षेपरूप.

२.  $\frac{x^3 - 6x^2 + 11x - 6}{x^3 + 4x^2 + x - 6}$  ह्या अपूर्णपदाच्या अंश-

छेदांचा दृढभाजक काढ, आणि त्यास अतिसंक्षेपरूप दे.

$$\begin{aligned} \frac{\text{क्ष}^2 - ६\text{क्ष} + ११\text{क्ष} - ६}{\text{क्ष}^2 + २\text{क्ष} + ९\text{क्ष} - ६} &= \frac{\text{क्ष}^2 - \text{क्ष} - ५\text{क्ष} + ५\text{क्ष} + ६\text{क्ष} - ६}{\text{क्ष}^2 - \text{क्ष} + ५\text{क्ष}^2 - ५\text{क्ष} + ६\text{क्ष} - ६} \\ &= \frac{\text{क्ष}(\text{क्ष}-१) - ५\text{क्ष}(\text{क्ष}-१) + ६(\text{क्ष}-१)}{\text{क्ष}^2(\text{क्ष}-१) + ५\text{क्ष}(\text{क्ष}-१) + ६(\text{क्ष}-१)} = \frac{(\text{क्ष}-१)(\text{क्ष}-५\text{क्ष}+६)}{(\text{क्ष}-१)(\text{क्ष}^2+५\text{क्ष}+६)} \\ &= \frac{\text{क्ष}-५\text{क्ष}+६}{\text{क्ष}^2+५\text{क्ष}+६} \quad \text{ह्या अपूर्णपदाचे अतिसंक्षेपरूप, आणि क्ष-१ हा दृढभाजक.} \end{aligned}$$

३.  $\frac{\text{क्ष}^2 - ६\text{क्ष} + २०}{\text{क्ष}^2 + ६\text{क्ष} - ५५}$  ह्या अपूर्णपदाच्या अंशछेदा

चा दृढभाजक काढून त्यास अतिसंक्षेपरूप दे.

$$\begin{aligned} \frac{\text{क्ष}^2 - ६\text{क्ष} + २०}{\text{क्ष}^2 + ६\text{क्ष} - ५५} &= \frac{\text{क्ष}^2 - ५\text{क्ष} - ४\text{क्ष} + २०}{\text{क्ष}^2 - ५\text{क्ष} + ११\text{क्ष} - ५५} \\ &= \frac{\text{क्ष}(\text{क्ष}-५) - ४(\text{क्ष}-५)}{\text{क्ष}(\text{क्ष}-५) + ११(\text{क्ष}-५)} = \frac{(\text{क्ष}-५)(\text{क्ष}-४)}{(\text{क्ष}+११)(\text{क्ष}-५)} = \frac{\text{क्ष}-४}{\text{क्ष}+११} \quad \text{ह} \\ &\text{ह्या अपूर्णपदाचे अतिसंक्षेपरूप, आणि क्ष-५ हा दृढभाजक.} \end{aligned}$$

४.  $\frac{\text{क्ष}^2 + \text{क्ष}^2\text{य} + \text{क्ष}^2\text{य} + \text{य}^2}{\text{क्ष}^2 - \text{य}^2}$  ह्या अपूर्णपदाचे अंशछेदांचा

चा दृढभाजक काढून त्यास अतिसंक्षेपरूप दे.

$$\begin{aligned} \frac{\text{क्ष}^2 + \text{क्ष}^2\text{य} + \text{क्ष}^2\text{य} + \text{य}^2}{\text{क्ष}^2 - \text{य}^2} &= \frac{\text{क्ष}^2(\text{क्ष}^2 + \text{य}^2) + \text{य}^2(\text{क्ष}^2 + \text{य}^2)}{(\text{क्ष}^2 + \text{य}^2)(\text{क्ष}^2 - \text{य}^2)} = \frac{\text{क्ष}^2 + \text{य}^2}{\text{क्ष}^2 - \text{य}^2} \\ &\text{ह्या अपूर्णपदाचे अतिसंक्षेपरूप, आणि क्ष}^2 + \text{य}^2 \text{ हा दृढभाजक.} \end{aligned}$$

$$१. \frac{अब+२अ-३ब-४क-अक-कै}{अक+२अ-५अब+४क+८क-१२ब} \text{ त्या}$$

अपूर्णपदांचे अंशछेदांचा दृढभाजक काढून ह्यास अतिसंक्षेप रूप दे .

$$\frac{अब+२अ-३ब-४क-अक-कै}{अक+२अ-५अब+४क+८क-१२ब}$$

$$\frac{२अ+अक+३अब-२अब-क-३ब-२अक-कै-३क}{२अ-८अब+८अक+अक-४क+४क+३अब-१२ब+१२क}$$

$$= \frac{अ(२अ+क+३ब)-ब(२अ+क+३ब)-क(२अ+क+३ब)}{२अ(अ-४ब+४क)+क(अ-४ब+४क)+३ब(अ-४ब+४क)}$$

$$= \frac{(अ-ब-क)(२अ+क+३ब)}{(अ-४ब+४क)(२अ+क+३ब)} = \frac{अ-ब-क}{अ-४ब+४क} \text{ हे त्या}$$

अपूर्णपदांचे अतिसंक्षेप रूप, आणि (२अ+क+३ब) हा दृढभाजक

(११) जेव्हा एक पद दुसऱ्या पदात बाकीन राहतां किती एक वेळां जाते तेव्हा त्या दुसऱ्या पदास पहिल्या पदाची ति-तकीपट आहे असें म्हणतात ; जसें ६अ हे २अची ३ पट आहे, आणि नक्ष ही क्षची नपट आहे .

जर एक पद दुसऱ्या पदास निःशेष भागितं तर ते पद त्या दुसऱ्या पदाच्या कोणत्याही पटीसही निःशेष भागितं . असें समज कीं ब, अ मध्ये मवेळां जातो ,

तर अ=मव, आणि नअ ही अची नपट आहे, तर  
नअ=नमव ; म्हणून व . नअमध्ये नमवेळां  
जातो .

जर एक पद दुसऱ्या दोन पराम निबंय भागि  
तें तर ते पद त्यांच्या बेरजेतम आणि वजाबाकीतम ही  
निबंय भागील . जर क्ष , अमध्य मवटा आणि वृम  
ध्ये ववेळा जातो , तर अ- मक्ष , आणि व- नक्ष ,  
∴ अ±व = मक्ष ± नक्ष - ( म + न ) , क्ष , म्हणून  
( अ + व ) त्या बेरजेत क्ष , ( म + न ) वेळां जातो  
आणि ( अ - व ) त्या वजाबाकीत ( म - न ) वेळा  
जातो .

आतां आण्णास दोन संख्यांचा दटभाजक का-  
ढण्याचा एक साधारण नियम बांधितां येईल .

ज्या दोन संख्यांचा दटभाजक काढायचा आ-  
हे त्या दाखविण्यास अ आणि व घे , आणि ज्यांत  
अ > व म्हणजे अ , वपेक्षां अधिक आहे असे मान .

असें समज कीं , व , अमध्ये पवेळां जाऊन  
बाकी क राहतो ; तर अ = पव + क ,

आणखी असें समज कीं क , वमध्ये कवेळां

जाऊन बाकी उ राहतो; तर व = कक + उ .

आणखी असें समजकीं उ, कमध्ये रबेळां जाऊन बाकी राहते, तर क = डर .

ब) अ (प

पव

क) व (क

कक

उ) क (उ

डर

०

आतां ∴ उ, कस निःशेष भागितो, ∴ उ ,  
ककस आणि कक + उ त्यास म्हणजे वस निःशेष  
भागितो;

∴ उ , पवस आणि पव + क त्यास म्हणजे अ-  
स निःशेष भागितो.

त्यावरून हें उघड आहे कीं, शेवटला भाग्य  
उ , अस आणि वस निःशेष भागितो म्हणून दु हा  
त्यांचा दृढभाजक आहे .

कारण उ हा त्याचा दृढभाजक आहे असें

मान तर,

∴ तो अस आणि वस निःशेष भागितो, ∴

तो अ आणि पव, आणि (अ-पव) म्हणजेच ह्यांस  
ही प्रत्येकीं निःशेष भागितो.

∴ तो ककस आणि व-ककस म्हणजे दुस निःशे-  
ष भागितो.

म्हणून अ आणि व ह्यांचा जो ददभाजक दु  
हा दुस निःशेष भागितो ;

आणि ∴ दु हा अ आणि व ह्यांचा साधारण  
भाजक आहे आणखी ∴ जो ददभाजक दुस निःशे-  
ष भागितो तो दु बरोबर असला पाहिजे .

∴ दु = द ; म्हणून शेवटला भाज्य जो दु तोच  
ददभाजक आहे .

ह्यावरून असा नियम निघतो कीं , मोठ्या सं-  
ख्येस धाकट्या संख्येनें भाग आणि त्या भा-  
जकास बाकीनें भाग , असें , बाकी शून्य राही  
तांपर्यंत कर ; शेवटला जो भाज्य तो ददभा-  
जक होईल .

हानियम दाहाव्या कलमांतील उदाहरणांस लागू आहे .

## लघुत्तमसाधारण गुणाकार.

कोणत्याही पदांचा साधारण गुणाकार तोच होय, कीं ज्यास त्या पदांनीं भागिलें असतां बाकी राहात नाही, आणि त्यांचा लघुत्तमसाधारण गुणाकार तोच होय कीं जो साधारण गुणाकारांत अति लहान असतो.

अ आणि ब ह्या पदांचा साधारण भाजक म आहे आणि  $\frac{अ}{म} = प$ , आणि  $\frac{ब}{म} = क$  आहे, असें मान; तर गुणाकारानें  $\frac{अब}{म^२} = पक$ ,  $\frac{अब}{म} = मपक = अक$  किंवा पब.

∴  $\frac{अब}{म}$  हा अ आणि ब ह्यांचा साधारण गुणाकार आहे. परंतु म जेव्हां अतिमोठा आहे तेव्हां  $\frac{अब}{म}$  अति लहान आहे; म्हणजे,

$\frac{अब}{दृढभाजक} = अ$  आणि ब ह्यांचा लघुत्तमसाधारण गुणाकार.

ह्याचरून असा नियम निघतो, कीं दोन पदांचा गुणाकार घेऊन त्या गुणाकारास त्यांच्या दृढभाजकानें भागावें, जो भाजक तो त्यांचा लघुत्तमसाधारण



रण गुणाकार होईल .

कितीही जरी पदे असली तरी त्याविषयी वर-  
चे प्रमाणेच सिद्ध करता येईल

लघुत्तमसाधारण गुणाकार बहुतकरून अटकळीने  
ही काढता येईल .

उदा०१.  $\frac{१२क्षै-३क्षैय+१२क्षय-४य}{४क्षै-१२क्षय-३य}$  ह्या अपूर्ण पदाच्या  
अंशछेदांचा दृढभाजक काढ, आणि ह्यास अतिसंक्षेप  
रूप दे .

येथे ४क्षै, ३क्षै ह्यांत जात नाहीत म्हणून  
भागाकार करण्याच्या अगोदर अंशास ४ ह्यांनी गुण,  
चार हा गुणक एकाच पदास म्हणजे अंशास लावल्या-  
ने दृढभाजकास काही बाध येणार नाही हे अगदी  
स्पष्ट आहे .

$४क्षै-१२क्षय-३य$   $१२क्षै-१२क्षैय+४क्षय-४य$  (३क्षै-१य  
 $१२क्षै-३क्षैय-१क्षय$

$-१क्षैय+१२क्षय-४य$  ह्यांस ४  
 $-३६क्षैय+१२क्षय-१६य$  ह्यांनी गुण.  
 $-३६क्षैय+१२क्षय-२०य$

ह्यांतून ४३य हा  
गुणक काढून टाक

$४३क्षय-४३य$

$$\text{क्ष-य) } ४ \text{ क्ष}^३ - \text{क्षय} - ३ \text{ य}^३ (४ \text{ क्ष} + ३ \text{ य}$$

$$४ \text{ क्ष}^३ - ४ \text{ क्षय}$$

$$\underline{३ \text{ क्षय} - ३ \text{ य}^३}$$

$$\underline{३ \text{ क्षय} - ३ \text{ य}^३}$$

∴ क्ष-य हा दृढभाजक आहे, आणि त्याने अपूर्णपदाच्या दोन्ही पदांस भागल्याने,

$$\frac{३ \text{ क्ष}^३ - ३ \text{ क्षय} + \text{क्षय} - \text{य}^३}{४ \text{ क्ष}^३ - \text{क्षय} - ३ \text{ य}^३} = \frac{३ \text{ क्ष}^३ + \text{य}^३}{४ \text{ क्ष} + ३ \text{ य}} \text{ हें उत्तर.}$$

उदा०२. असें दाखीवकीं,  $\frac{\text{क्ष}^३ + \text{क्ष}^३ - (\text{क्ष}^३ + \text{क्ष}^३)}{\text{क्ष}^३ + \text{क्ष} - (\text{क्ष}^३ + \text{क्ष}^३)} = \frac{\text{क्ष}^३ + \text{क्ष}^३}{\text{क्ष} + \text{क्ष}^३}$

$$\frac{\text{क्ष}^३ + \text{क्ष}^३ - (\text{क्ष}^३ + \text{क्ष}^३)}{\text{क्ष}^३ + \text{क्ष} - (\text{क्ष}^३ + \text{क्ष}^३)} = \frac{\text{क्ष}^३(\text{क्ष}^३+१) - \text{क्ष}^३(१+\text{क्ष}^३)}{\text{क्ष}(\text{क्ष}^३+१) - \text{क्ष}^३(१+\text{क्ष}^३)}$$

$$= \frac{(\text{क्ष}^३ - \text{क्ष}^३)(१+\text{क्ष}^३)}{(\text{क्ष} - \text{क्ष}^३)(१+\text{क्ष}^३)} = \frac{\text{क्ष}^३(\text{क्ष}^३-१)(१+\text{क्ष}^३)}{\text{क्ष}^३(\text{क्ष}^३-१)(१+\text{क्ष}^३)}$$

$$= \frac{\text{क्ष}^३(१+\text{क्ष}^३)}{\text{क्ष}^३(\text{क्ष}^३+१)} = \frac{\text{क्ष}^३ + \text{क्ष}^४}{\text{क्ष} + \text{क्ष}^४} \text{ हें उत्तर.}$$

ह्या पुढील पदांचे दृढभाजक काढ.

१.  $\text{क्ष}^३ + \text{क्ष} - २$  आणि  $\text{क्ष}^३ + २ \text{ क्ष} - ३$

उत्तर. क्ष-१

२.  $६अ + ११अक्ष + ३क्ष$  आणि  $६अ + १०अक्ष - ३क्ष$ .  
उत्तर.  $२अ + ३क्ष$ .

३.  $८अब - १०अब + २ब$  आणि  $९अब - ९अब + २अब - ३अब$ .  
उत्तर.  $अब - ब$ .

४.  $१क्ष + २क्ष + २क्ष + १$  आणि  $१क्ष - २क्ष - १$ .  
उत्तर.  $क्ष + १$ .

५.  $२क्ष - १क्ष - ६क्ष$  आणि  $३क्ष - ८क्ष + ४क्ष$ .  
उत्तर.  $क्ष - २क्ष$ .

६.  $२क्ष - ३क्ष - २क्ष + ३$  आणि  $३क्ष + २क्ष - २क्ष - २क्ष - १$ .  
उत्तर.  $क्ष - १$ .

ह्या पुढील अपूर्णपदांस अतिसंक्षेप रूप दे

७.  $\frac{क्ष + २अक्ष + अ}{क्ष - अ}$  आणि  $\frac{क्ष - २क्ष + य}{क्ष - य}$ .

उत्तर.  $\frac{क्ष + अ}{क्ष - अ}$  आणि  $\frac{क्ष - य}{क्ष + य}$

८.  $\frac{अब}{(अ + ब)}$  आणि  $\frac{(अ + ब)}{अ - ब}$

उत्तर.  $\frac{अ - अब + ब}{अ + ब}$  आणि  $\frac{(अ + ब)}{अ - ब}$

$$९. \frac{क्ष^३ + क्ष - २}{२क्ष^२ - ३क्ष + १} \text{ आणि } \frac{क्ष^३ + क्ष - २}{क्ष^३ + क्ष - २}$$

$$\text{उत्तर } \frac{क्ष + २}{२क्ष - १} \text{ आणि } \frac{क्ष^३ + २क्ष^२ + २}{क्ष^३ + २}$$

$$१०. \frac{क्ष^३ - क्ष - य - क्षय + य}{क्ष - य} \text{ आणि } \frac{३क्ष^३ - २२क्ष - १५}{१क्ष^३ - १०क्ष^२ + १८क्ष}$$

$$\text{उत्तर } \frac{क्ष - य}{क्ष - य} \text{ आणि } \frac{३क्ष^३ + १८क्ष + १}{१क्ष^३ - २क्ष^२ - ६क्ष}$$

बीजांतील अपूर्णपदांची वेरीज, वजाबाकी,

गुणाकार, आणि भागाकार.

उदाहरणं.

$$१. \frac{२क्ष - १}{१} \text{ आणि } \frac{क्ष - १}{२क्ष} \text{ ह्यांची वेरीज कर.}$$

येथं छेदांचा लघुनमसाधारणगुणाकार ६क्ष आहे, आणि पहिल्या अपूर्णपदाच्या दोन्ही पदांस २क्ष ह्यांनी आणि दुसऱ्याच्या दोन्ही पदांस १ ह्यांनी गुणवें म्हणजे दोन्ही अपूर्णपदे समच्छेद होतील; म्हणजे

$$\left. \begin{aligned} \frac{२६५-५}{३} \times \frac{२६५}{२६५} &= \frac{४६५-१०६५}{६६५} \\ \frac{६५-१}{२६५} \times \frac{३}{३} &= \frac{३६५-३}{६६५} \end{aligned} \right\} \therefore \frac{४६५-१०६५-३}{६६५} \text{ ही बेरीज.}$$

$$२. \frac{अ}{२} - \frac{ब}{३} + \frac{क}{४} \quad \frac{अ}{४} - \frac{ब}{३} - \frac{क}{३}, \text{ आणि}$$

$$\frac{अ}{३} + \frac{ब}{४} + \frac{क}{२} \text{ या अपूर्ण पदांची बेरीज कर}$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{अ}{२} - \frac{ब}{३} + \frac{क}{४} &= \frac{६अ}{१२} - \frac{२०ब}{६०} + \frac{१५क}{३०} \\ \frac{अ}{४} - \frac{ब}{५} - \frac{क}{३} &= \frac{३अ}{१२} - \frac{१२ब}{६०} - \frac{१०क}{३०} \\ \frac{अ}{३} + \frac{ब}{४} + \frac{क}{२} &= \frac{४अ}{१२} + \frac{१५ब}{६०} + \frac{१५क}{३०} \end{aligned} \right\} \therefore \frac{१३अ}{१२} - \frac{१७ब}{६०} + \frac{१५क}{३०} \text{ ही बेरीज}$$

$$३. \frac{१६५}{२} - \frac{७५}{३} - \frac{४६५}{३} + \frac{५५}{२}, \text{ आणि } \frac{१०६५}{६}$$

$$- \frac{७५}{२} \text{ या अपूर्ण पदांची बेरीज ये}$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{१६५}{२} - \frac{७५}{३} &= \frac{३०६५}{१२} - \frac{१४५}{६} \\ - \frac{४६५}{३} + \frac{५५}{२} &= - \frac{१६६५}{१२} + \frac{१५५}{६} \\ \frac{७६५}{२} - \frac{७५}{३} &= \frac{२१६५}{१२} - \frac{१५५}{६} \end{aligned} \right\} \therefore \frac{३५६५}{१२} - \frac{८५}{६} = \frac{२११६५}{१२} - \frac{१६५}{६} = \text{बेरीज.}$$

$$४. \frac{३}{४(१-६४)} + \frac{३}{४(१-६४)} + \frac{१}{४(१-६४)} - \frac{१-६४}{४(१+६४)}$$

ह्यांचें एक अपूर्ण पद कर .

दुसरें आणि तिसरें अपूर्णपद घे आणि तीं समच्छेद करून पाद

$$\frac{३}{४(१-६४)} \times \frac{१+६४}{१+६४} = \frac{३+३६४}{४(१-६४)}$$

$$\frac{१}{४(१+६४)} \times \frac{१-६४}{१-६४} = \frac{१-६४}{४(१-६४)}$$

ह्यांची बेरीज घेतल्यानें,  $\frac{४+३६४}{४(१-६४)} = \frac{३+६४}{४(१-६४)}$

हे पद आणि चवथें अपूर्ण पद घेऊन तीं समच्छेद करा.

$$\frac{३+६४}{४(१-६४)} \times \frac{१+६४}{१+६४} = \frac{६४+३६४+६४+३}{४(१-६४)}$$

$$\frac{१-६४}{४(१+६४)} \times \frac{१-६४}{१-६४} = \frac{१-६४-६४+६४}{४(१-६४)}$$

ह्यांची वजाबाकी घेतल्यानें,  $\frac{३६४+३६४+१}{४(१-६४)}$

हे पद आणि पहिलें अपूर्ण पद घे आणि ह्यांचे छेदां-

चा लघुतमसाधारणगुणाकार कादून हीं समच्छेद कर

$$\frac{४(१-१४)(१-१४)^२(१-१४)^३ \cdot (१+१४)}{(१-१४)(१+१४)(१+१४)^२} = ४(१-१४)(१-१४)^२$$

= ल० सा० गु०

$$\frac{३}{४(१-१४)^३} \times \frac{१+१४+१४^२+१४^३}{१+१४+१४^२+१४^३} = \frac{३+३१४+३१४^२+३१४^३}{४(१-१४)(१-१४)^२}$$

$$\frac{१+३१४+३१४^२}{४(१-१४)} \times \frac{१-१४}{१-१४} = \frac{१+१४+१४^२-३१४^३}{४(१-१४)(१-१४)^२}$$

$$\text{ह्यांची बेरीज घेतल्याने, } \frac{४+४१४+४१४^२}{४(१-१४)(१-१४)^२} = \frac{१+१४+१४^२}{१-१४-१४^२+१४^३}$$

अ+ब आणि  $\frac{अ}{२} - \frac{ब}{२}$  ह्यांची वजाबाकी कर

$$अ+ब = \frac{२अ}{२} + \frac{२ब}{२}$$

$$\frac{\frac{अ}{२} - \frac{ब}{२}}{\frac{अ}{२} + \frac{ब}{२}} = \text{बाकी}$$

$$\frac{\frac{अ}{२} + \frac{ब}{२}}{\frac{अ}{२} + \frac{ब}{२}} = \text{बाकी}$$

$$६. \frac{अ}{३} + \frac{ब}{२} - \frac{क}{४} \text{ आणि } \frac{अ+ब}{४} - \frac{क}{४} \text{ ह्यांची}$$

वजाबाकी कर

$$\frac{अ}{३} + \frac{ब}{२} - \frac{क}{४} = \frac{४अ}{१२} + \frac{६ब}{१२} - \frac{३क}{१२}$$

$$\frac{अ+ब}{४} - \frac{क}{८} = \frac{३अ}{१२} + \frac{३ब}{१२} - \frac{क}{८}$$

$$\frac{अ}{१२} + \frac{३ब}{१२} - \frac{क}{८} = \frac{अ+३ब}{१२} - \frac{क}{८}$$

७.  $\frac{क्ष}{क्ष-२}$  आणि  $\frac{क्ष}{क्ष-३}$  ह्यांची बेरीज आणि वजाबाकी कर.

$$\frac{क्ष}{क्ष-२} \times \frac{क्ष-३}{क्ष-३} = \frac{क्ष^२-३क्ष}{क्ष^२-५क्ष+६}$$

$$\frac{क्ष}{क्ष-३} \times \frac{क्ष-२}{क्ष-२} = \frac{क्ष^२-२क्ष}{क्ष^२-५क्ष+६}$$

ह्यांचे बेरजेने,  $\frac{२क्ष^२-५क्ष}{क्ष^२-५क्ष+६}$ , वजाबाकीने,  $\frac{-क्ष}{क्ष^२-५क्ष+६}$ .

$$८. \frac{४क्ष^३-१}{८} \text{ ह्यास } \frac{२क्ष+१}{२क्ष-१} \text{ ह्यांनी आणि } \frac{२अ^३}{अ^२-ब^२}$$

ह्यास  $\frac{(अ+ब)^३}{४ब^३अ^२}$  ह्यांनी गुण.

$$\frac{४क्ष^३-१}{८} \times \frac{२क्ष+१}{२क्ष-१} = \frac{(२क्ष+१)(२क्ष-१)}{८} \times \frac{२क्ष+१}{२क्ष-१}$$

$$\frac{(२क्ष+१)(२क्ष+१)}{८} = \frac{४क्ष^३+४क्ष+१}{८}$$



$$\frac{२अ^२}{अ^३ब^२} \times \frac{(अ+ब)^१}{४अ^२ब^२} = \frac{२अ^२}{(अ+ब)(अ-ब)} \times \frac{(अ+ब)(अ-ब)}{२अ^२ \times २ब^२}$$

$$= \frac{अ+ब}{२ब^२(अ-ब)}$$

९.  $\frac{अ+१}{ब}$  ह्यांस  $\frac{१+अ}{ब}$  ह्यांनी; आणि  $(\frac{१}{अ} + \frac{१}{ब})$

ह्यांस  $(\frac{१}{अ} - \frac{१}{ब})$  ह्यांनी भाग.

$$\frac{अ+१}{ब} \div \frac{१+अ}{ब} = \frac{अ+१}{ब} \div \frac{अ+१}{बअ} = \frac{अ+१}{ब} \times \frac{बअ}{अ+१} = अ.$$

$$(\frac{१}{अ} + \frac{१}{ब}) \div (\frac{१}{अ} - \frac{१}{ब}) = \frac{ब+अ}{अब} \div \frac{ब-अ}{अब}$$

$$= \frac{ब+अ}{अब} \times \frac{अब}{ब-अ} = \frac{अ+ब}{ब-अ}.$$

१.  $\frac{क्ष-(अ+ब)क्ष+अब}{क्ष-(अ-ब)क्ष-अब}$  ह्यांस  $\frac{क्ष+ब}{क्ष-ब}$  ह्यांनी गुण.

$$\frac{क्ष-(अ+ब)क्ष+अब}{क्ष-(अ-ब)क्ष-अब} = \frac{क्ष-बक्ष-अक्ष+अब}{क्ष-बक्ष-अक्ष-अब}$$

$$= \frac{क्ष(क्ष-ब)-अ(क्ष-ब)}{क्ष(क्ष+ब)-अ(क्ष+ब)} = \frac{(क्ष-अ)(क्ष-ब)}{(क्ष-अ)(क्ष+ब)} = \frac{क्ष-ब}{क्ष+ब},$$

॥ भाज्यपदाच्या दोन्ही पदांस अने गुणून हे पद आले आहे.

आणि  $\frac{x-b}{x+b} \times \frac{x+b}{x-b} = 1$ .

११.  $\frac{a^m}{(a+b)^n} + \frac{a^{m-1}b}{(a+b)^{n-1}} - \frac{a^{m-2}b^2}{(a+b)^{n-2}}$  यांचे

एक अपूर्ण पद कर.

येथे  $(a+b)^n$  हा छेदाचा लघुतमसाधारण गुणाकार आहे म्हणून दुसरे आणि तिसरे अपूर्णपद घे , आणि त्यांस हा छेद आण ; म्हणजे ,

$$\frac{a^{m-2}b^2}{(a+b)^{n-2}} \times \frac{a+b}{a+b} = \frac{a^{m-1}b^2 + a^{m-2}b^3}{(a+b)^n}$$

$$\frac{a^{m-3}b^3}{(a+b)^{n-1}} \times \frac{(a+b)}{(a+b)} = \frac{a^{m-2}b^3 + a^{m-3}b^4}{(a+b)^n}$$

त्यांची वजाबाकी केल्याने,  $\frac{a^{m-2}b^2 - a^{m-3}b^3}{(a+b)^n}$ .

आणि त्यांत पहिले अपूर्ण पद मिळवल्याने,

$$\frac{a^m - (a^{m-1} + a^{m-2}b)}{(a+b)^n}.$$

अपूर्णपदांच्या बेरजेची उदाहरणे.

१.  $\frac{x^2}{x^2-1}, \frac{x^3}{x^3-1}$ , आणि  $\frac{x^4}{x^4-1}$  यांची बेरीज कर

$$\text{उत्तर. } \frac{२३१५}{१२} = १९ + \frac{११}{१२} १५.$$

$$२. \frac{२१५}{५} + \frac{३१५}{२} + \frac{७१५}{१०}; \text{आणि } \frac{१५}{अ+१५} + \frac{अ}{अ-१५}.$$

$$\text{उत्तर. } \frac{१११५}{५}; \text{आणि } \frac{अ+२अ१५-१५^२}{अ^२-१५^२}.$$

$$३. \frac{१०अ^३}{२ब} + \frac{२अ}{५} + \frac{३ब}{७अ}; \text{आणि } \frac{१५}{१५+३} + \frac{१५}{१५-३}.$$

$$\text{उत्तर. } \frac{१०५अ^३+२०अब+३०ब^३}{१००अब}; \text{आणि } \frac{२१५^२}{१५^२-९}.$$

$$४. \frac{अ+ब}{अ-ब} + \frac{अ-ब}{अ+ब}; \text{आणि } \frac{२१५}{१-१५^२} + \frac{१}{१५+१}.$$

$$\text{उत्तर. } \frac{२(अ+ब^२)}{अ^२-ब^२}; \text{आणि } \frac{१}{१-१५}.$$

$$५. \frac{अ+अब+ब^३}{अ+ब} + \frac{ब^३}{अ-ब}; \text{आणि } \frac{१५-१}{१५+१५+१}$$

$$+ \frac{१}{१५-१}.$$

$$\text{उत्तर. } \frac{अ(अ+ब^३)}{अ^२-ब^२}; \text{आणि } \frac{२१५^२-१५+२}{१५^२-१}.$$

$$६. \frac{x}{x-y} + \frac{y}{x+y} + \frac{1}{x-y} \text{ आणि } \frac{a}{1-a} + \frac{a}{1+a} + \frac{1}{1+a}.$$

$$\text{उत्तर. } \frac{2x+x+y+y}{x-y}; \text{ आणि } \frac{1}{1-a}.$$

अपूर्णपदांच्या वजाबाकीचीं उदाहरणे.

$$१. \frac{5a}{2} \text{ यांतून } \frac{a}{3} \text{ हें; आणि } \frac{2(x+y)}{4} \text{ यांतून } \frac{x-y}{4} \text{ हें वजा कर.}$$

$$\text{उत्तर. } \frac{13}{6}a; \text{ आणि } \frac{4x+3y}{4}.$$

$$२. \frac{5y+2}{3} - \frac{2y+1}{3}; \text{ आणि } \frac{5x-1}{x+1} - \frac{3x+2}{x-1}.$$

$$\text{उत्तर. } \frac{y-1}{3}; \text{ आणि } \frac{2x^2-13x+1}{x^2-1}.$$

$$३. \frac{a+2b}{a-2b} - \frac{a-2b}{a+2b}; \text{ आणि } \frac{1}{x-y} - \frac{1}{x+y}.$$

$$\text{उत्तर. } \frac{4ab}{a^2-b^2}; \text{ आणि } \frac{2y}{x^2-y^2}.$$

$$४. \frac{१}{य-ज्ञ} - \frac{१}{य-ज्ञ^२}; \text{ आणि } \frac{२क्ष^२-२क्ष+१}{क्ष^२क्ष} \\ - \frac{क्ष}{क्ष-१}$$

$$\text{उत्तर. } \frac{य+ज्ञ-१}{य-ज्ञ^२}; \text{ आणि } १-\frac{१}{क्ष}.$$

$$५. \frac{क्ष^२-क्ष+१}{क्ष-१} - \frac{२}{क्ष+१}; \text{ आणि } \frac{अ}{(१-अ)^२} \\ + \frac{१}{१-अ} - \frac{अ^२}{(१-अ)^३}.$$

$$\text{उत्तर. } \frac{क्ष^२-२क्ष+१}{क्ष^२-१}; \text{ आणि } \frac{१-अ-अ^२}{(१-अ)^३}.$$

$$६. \frac{क्ष^२+य^२}{क्ष-य^२} + \frac{क्ष}{क्ष+य} - \frac{य}{क्ष-य}; \text{ आणि } \\ १-\frac{१}{(क्ष-य)^२} - \frac{१}{क्ष^२य^२}.$$

$$\text{उत्तर. } \frac{२क्ष}{क्ष+य}; \text{ आणि } १-\frac{२य}{(क्ष+य)(क्ष-य)^२}.$$

$$७. \frac{१}{२} \cdot \frac{३म+२न}{३म-२न} - \frac{१}{२} \cdot \frac{३म-२न}{३म+२न}; \text{आणि}$$

$$\frac{क्ष^{३न}}{क्ष^{३न}-१} + \frac{१}{क्ष^{३न}-१} - \frac{क्ष^{३न}}{क्ष^{३न}-१} - \frac{१}{क्ष^{३न}-१}.$$

$$\text{उत्तर. } \frac{६मन}{९म-४न}; \text{आणि } \frac{३न}{क्ष^{३न}+२}.$$

अपूर्णपदांच्या गुणाकाराची उदाहरणे.

$$१. \frac{३अ}{५} \text{ ह्यांस } \frac{अ}{४} \text{ ह्यांनी; आणि } \frac{२क्ष}{३} \text{ ह्यांस}$$

$$\frac{क्षय^{१}}{६} \text{ ह्यांनी गुण.}$$

$$\text{उत्तर. } \frac{३अ^२}{२०}; \text{आणि } \frac{क्षय^{२}}{९}.$$

$$२. \frac{२क्ष}{क्ष-य} \times \frac{क्ष-य^{२}}{८}; \text{आणि } \frac{क्ष-१}{३} \times \frac{६अ}{क्ष+१}.$$

$$\text{उत्तर. } \frac{क्ष^{३}+क्षय}{४}; \text{आणि } २अ(क्ष-१).$$

$$३. \frac{अ-ब^{१}}{अ} \times \frac{१}{अ+ब} \times \frac{अ}{अ-ब}; \text{आणि}$$

$$\frac{१५क्ष-२०}{२क्ष} \times \frac{३क्ष^{१}}{५क्ष-१०}.$$

उत्तर. १ ; आणि  $\frac{१}{२}$  झ .

$$४. \frac{(क्ष-१)^१}{य^३} \times \frac{(क्ष+१)य^१}{क्ष-१} ; \text{आणि } \left(m + \frac{१}{m} - १\right) \\ \times \left(m + \frac{१}{m} + १\right).$$

उत्तर.  $\frac{क्ष^१-१}{य}$  ; आणि  $m+१ + \frac{१}{m}$ .

$$५. \left(क्ष - \frac{य^१}{क्ष}\right) \times \left(\frac{क्ष}{य} + \frac{य}{क्ष}\right) ; \text{आणि } \frac{४क्ष^१-१}{१क्ष-य^३} \\ \times \frac{३क्ष+य}{२क्ष-१}.$$

उत्तर.  $\frac{क्ष-य^१}{क्ष^१य}$  ; आणि  $\frac{२क्ष^१+१}{३क्ष-य}$ .

$$६. \left\{ \frac{अक्ष}{अ-क्ष^२} - अक्ष-क्ष^१ \right\} \times \frac{अ+क्ष}{क्ष^३}.$$

उत्तर.  $\frac{क्ष^३}{अ-क्ष}$

अपूर्ण पदांच्या भागाकाराची उदाहरणे

$$१. \frac{५m^१}{n} \div \frac{१०}{३n} ; \text{आणि } \frac{३क्ष}{२क्ष-२} \div \frac{२क्ष}{क्ष-१}$$

ઉત્તર.  $\frac{3}{2} મ^૩$  ; આણિ  $\frac{3}{4}$  .

$$૨. \frac{૪અ+૨}{૩} \div \frac{૨અ+૧}{૧અ} ; \text{આણિ } \frac{(૧+અ)^૩}{૧-અ} \div \frac{૧+અ}{(૧-અ)^૩} .$$

ઉત્તર.  $\frac{૧૦અ}{૩}$  ; આણિ  $૧-અ^૩$  .

$$૩. \left( ૧+ \frac{૧}{૧-૧} \right) \div \left( ૧- \frac{૧}{૧-૧} \right) ; \text{આણિ } \left( ૧- \frac{૧}{૧} \right) \div \left( ૧+ \frac{૧}{૧} \right) .$$

ઉત્તર.  $\frac{૧}{૧-૨}$  ; આણિ  $૧- \frac{૧}{૧}$  .

$$૪. \frac{૧-૩૧અ+૩૧અ-અ}{૧+અ} \div \frac{૧-અ}{૧+અ} .$$

ઉત્તર.  $(૧-અ)^૩$  .

$$૫. \frac{૧-અ}{અ+બ} \div \frac{૧-અ}{અ-અબ+બ}$$

ઉત્તર.  $\frac{૧+૧અ+૧અ+અ}{અ+બ}$  .

$$૬. \left( ૧+૨+ \frac{૧}{૧} \right) \div \frac{૧+૧}{અ} .$$

ઉત્તર.  $\frac{અ+અ}{૧}$  .



पुढील समीकरणांत  $x$  ची किंमत काढ.

१.  $3x + 4 = \frac{5x + 4}{2} + 6$ . दोहोनीं गुण.

$6x + 8 = 5x + 4 + 12$ . स्थलांतर कर

$6x - 5x = 4 + 12 - 8$ .

$\therefore x = 12$

२.  $\frac{30 + x}{x} - 4 = \frac{6}{x}$ .  $x$  नीं गुण.

$30 + x - 4x = 6$ . स्थलांतर कर.

$x - 4x = 6 - 30$

$-3x = -24$ .  $-3$  सोनी भाग.

$\therefore x = 8$ .

३.  $\frac{x}{2} - \frac{5x + 4}{3} = 9 - \frac{6x - 2}{3}$ . छेदांचाल०  
सा० गु० ६ सा  
नें गुण.

$3x - 10x - 8 = 42 - 12x + 4$ . स्थलांतर कर.

$3x - 10x + 12x = 42 + 4 + 8$ .

॥ त्या अपूर्ण पदांच्या पूर्वी कृण्विन्ह आहे म्हणून त्यांच्या अंगांचे विन्ह बदलले पाहिजे, कारण ते विन्ह असें दर्शविते कीं, त्यांचे पाठीमागे जे पद आहे त्यांतून प्रत्येक पद नजा करावयाचें आहे.

$$१६ = ५४$$

$$\therefore १६ = ६.$$

$$४. \frac{२}{१६+१} + \frac{५}{२१६+२} + \frac{६१६-६}{१६-१} = २\frac{५}{६}$$

येथे  $\frac{६१६-६}{१६-१} = \frac{६(१६-१)}{(१६-१)(१६+१)}$  यासुद्धा वरील समीकरण असे होईल.

$$\frac{२}{१६+१} + \frac{५}{२(१६+१)} + \frac{६}{१६-१} = २\frac{५}{६}$$

$$\therefore २(१६+१) \text{ यांनी गुणून, } १६ + २० + ४८ = २१(१६+१).$$

$$८४ = २१(१६+१).$$

$$४ = १६+१.$$

$$\therefore ३ = १६.$$

$$५. \frac{अ१+ब}{क} + \frac{अ१+ब}{क१+ब} = \frac{२अ१+उ}{२क} + \frac{व}{क}$$

२क यांनी गुण.

$$२अ१+२ब + \frac{२अक१+२कब}{क१+ब} = २अ१+उ+२ब.$$

$\therefore २अ१$  आणि  $२ब$  हे समीकरणाचे प्रत्येक बाजूस असून त्यांची किंमत सरूप आहेत,  $\therefore$  ते गाढता ये-

तील ; आणि  $\therefore$  बरील समीकरण असें होतें .

$$\frac{२अकक्ष+२बक}{कक्ष+ब} = उ. \quad (कक्ष+ब) \text{ यांनीं गुण.}$$

$$२अकक्ष+२बक = कउक्ष+उब. \quad \text{स्थलांतरका.}$$

$$२अकक्ष-कउक्ष = उब-२बक.$$

$$(२अक-उक) क्ष = उब-२बक.$$

$$\therefore क्ष = \frac{उब-२बक}{२अक-उक}.$$

$$\begin{aligned} \text{६. } \frac{७क्ष+१३}{१०} + \frac{११क्ष-\frac{क्ष-३}{२}}{१२} &= \frac{३क्ष+१}{५} \\ + \frac{४३क्ष-\frac{३-८क्ष}{२}}{२२} \end{aligned}$$

$$\text{येथें } \frac{७क्ष+१३}{१०} = \frac{१४क्ष+१३}{२०}.$$

$$\begin{aligned} \frac{११क्ष-\frac{क्ष-३}{२}}{१२} &= \frac{११क्ष-\frac{२क्ष-३}{२}}{१२} = \frac{४४क्ष-२क्ष+३}{४८} \\ &= \frac{४२क्ष+३}{४८} = \frac{१४क्ष+१}{१६}. \end{aligned}$$

$$\frac{४३क्ष-\frac{३-८क्ष}{२}}{२२} = \frac{८६क्ष-३+८क्ष}{४४} = \frac{९४क्ष-३}{४४}.$$

म्हणून बरील समीकरण असें होतें,

$$\frac{१४६५+१३}{२०} + \frac{१४६५+१}{१६} = \frac{३६५+१}{५} + \frac{१४६५-३}{४४}.$$

छेदांचा लघु. सा. गुं. ८८०, ह्यानें गुण.

$$६१६६५+१७२+७७०६५+५५=५२८६५+१७६+१८८०६५-६०$$

$$१३८६६५-२४०८६५=११६-६२७$$

$$-१०२२६५=-५११$$

$$\therefore ६५ = \frac{-५११}{-१०२२} = \frac{१}{२}.$$

प्रश्न.

१. १०० ह्या संख्येचे असे दोन भाग कर, कीं जर एके भागास १५ ह्यांनीं भागिलें आणि दुसऱ्यास ५ ह्यांनीं भागिलें तर त्यांच्या भागाकारांची बेरीज १० होईल.

एक भाग दाखवायास ६५ ये, तर १००-६५ हा दुसरा भाग होईल.

आतां  $\frac{६५}{१५}$  आणि  $\frac{१००-६५}{५}$  हे दोन भागाकार आहेत.

$$\text{म्हणून प्रश्नाप्रमाणें, } \frac{६५}{१५} + \frac{१००-६५}{५} = १०;$$

$$६५ + ३०० - ३६५ = १५०$$

$$-२६५ = १५० - ३०० = -१५०$$

∴ क्ष = ७५ = एकभाग.

आणि ∴ १०० - क्ष = १०० - ७५ = २५ = दुसराभाग.

अथवा प्रकारांतरानें; दोन भाग दाखविण्यास  
क्ष आणि य हीं दोन अव्यक्त असरे घे.

$$\text{तर } क्ष + य = १०० \dots (१)$$

आणि  $\frac{क्ष}{१५} + \frac{य}{५} = १० \dots (२)$  १५ ह्यांनीं मूण.

$$(१) \quad \left. \begin{array}{l} क्ष + ३य = १५० \\ क्ष + य = १०० \end{array} \right\} \text{ वजावाकीकर.}$$

$$२ य = ५० \quad \therefore य = २५ = \text{एकभाग,}$$

$$(१) \quad क्ष = १०० - य = १०० - २५ = ७५ = \text{दुसराभाग.}$$

२. एक मनुष्य आपल्या देशांतून निघून दुसरे देशांत गेला; त्याचे पाशीं एक मोहर होती आणि त्यास अशी इच्छा झाली कीं, त्या नव्या देशांत जीं दोन प्रकारचीं नाणीं आहेत, तीं पंचवीस घेऊन आपली मोहर देऊन टाकावी; आणि तो चौकशी करून पाहिले तो एका प्रकारचें नाणें घेतलें तर एके मोहरेस ३० येतें आणि दुसऱ्या प्रकारचें घेतलें तर १५ येतें; तर एक एक प्रकारचें नाणें त्यानें किती किती घ्यावें?

एक प्रकारचें नाणें दाखवायास क्ष ये ,  
आणि दुसरे प्रकारचें.....य.... ;

$$\text{तर } \text{क्ष} + \text{य} = २५ \dots\dots (१)$$

$$\begin{array}{l} \text{नाणी} \quad \text{नाणी} \quad \text{रु०} \\ ३० : \text{क्ष} : : १५ : \frac{\text{क्ष}}{२} = \text{क्ष नाण्यांची किंमत.} \end{array}$$

$$१५ : \text{य} : : १५ : \text{य} = \text{य} \dots\dots\dots$$

$$\text{म्हणून, प्रश्नाप्रमाणे, } \frac{\text{क्ष}}{२} + \text{य} = १५ \text{ रुपये} \dots (२)$$

$$(१) \quad \left. \begin{array}{l} \text{क्ष} + २ \text{ य} = ३० \\ \text{क्ष} + \text{य} = २५ \end{array} \right\} \text{ वजाबाकी कर }$$

$$\text{य} = ५ = \text{दुसरे प्रकारचें नाणें.}$$

$$(१) \text{ क्ष} = २५ - \text{य} = २५ - ५ = २० = \text{पहिले} \dots\dots\dots$$

३. एक गृहस्थ जितका पैसा खर्च करीत असे त्या-  
चा रू मागे टाकी. पुढें त्याचा खर्च पहिल्या प्रमाणेच रा-  
हून मिळकत मात्र कमी झाली म्हणून पहिल्याच्या अर्धा  
इतका पैसा तो आतां मागे ठाकूं लागला. तर कमी झाले-  
ली मिळकत आणि पहिली मिळकत ह्यांतील अंतर प-  
हिले मिळकतीचा कितवा भाग होतें?

$$\text{रु० १ मोहोर} = १५ \text{ रुपये}$$

तो जो पेसा मागें टाकितो = २६ रुपये थे,

तर ..... खर्च करी = ८६ ..... ,

∴ २६ + ८६ = १०६ = त्याची पहिली मिळकत .

पुनः ८६ हे तो खर्चाचे, आणि ६६ हे मागें टाकीचे;

∴ ८६ + ६६ = १५२ = कमी झालेली मिळकत .

∴ १०६ - १५२ = ४६ = पहिली आणि कमी झालेली मिळकत ह्यांतील अंतर .

म्हणून  $\frac{६६}{१०६} = \frac{१}{१०} =$  उत्तर .

४. अ किती एक मैल कांहीं वेळांत कांहीं चालीनें चालून गेला; जर तो  $\frac{१}{२}$  मैल दर तासास जाजती चालता तर त्यास, पहिल्या चालीनें जितका विवक्षित ठिकाणीं जावयास वेळ लागला, त्याचा  $\frac{५}{६}$  वेळ लागता; परंतु  $\frac{१}{२}$  मैल कमी चालता तर त्यास विवक्षित ठिकाणीं जावयास पूर्ववेळपेक्षां  $२\frac{१}{२}$  तास जाजती वेळ लागता; तर त्यास किती लांब जावयाचें होतें व तो कोणत्या प्रमाणानें चालला?

त्याची दर तासाची चाल = ६ मैल थे,

आणि एकंदर अंतर = ५ ..... ;

तर  $\frac{५}{६}$  इतके तास त्यास जावयास लागले .

आतां  $१५ + \frac{१}{२} = \frac{३१+१}{२}$  ही वाढलेली चाल;

$\therefore$  य  $\div \frac{३१+१}{२}$  किंवा  $\frac{३५}{३१+१}$  इतके तास जर तो  $\frac{१}{२}$  मैल जाजती चालता तर रस्त्यावर लागते.

म्हणून, प्रश्नाप्रमाणें,  $\frac{३५}{३१+१} = \frac{५}{५} \cdot \frac{५}{१५} \dots (१)$

पुनः  $१५ - \frac{१}{२}$  किंवा  $\frac{३१-१}{२}$  ही कमी झालेली चाल,

$\therefore$  य  $\div \frac{३१-१}{२}$  किंवा  $\frac{३५}{३१-१}$  इतके तास जर तो  $\frac{१}{२}$  मैल कमी चालता तर त्यास रस्त्यावर लागते.

म्हणून, प्रश्नाप्रमाणें,  $\frac{३५}{३१-१} = \frac{५}{१५} + २\frac{१}{२} \dots (२)$

(१) त्यास ३५ ह्यानें भागून,  $\frac{१}{३१+१} = \frac{३}{५१५}$ ;

$\therefore ५१५ = ४१५ + २,$

$५१५ - ४१५ = २; \therefore १५ = २.$

ही १५ ची किंमत (२) ह्यांत मांड.

$$\frac{३५}{४-१} = \frac{५}{२} + \frac{५}{२};$$

$$\frac{३५}{३} = \frac{५}{२} + \frac{५}{२} \quad \text{६ ह्यांनीं गुण.}$$

$$४५ = ३५ + १०;$$

$$४५ - ३५ = १० \therefore य = १०.$$



उत्तर . अंतर = १५ मैल ; आणि दरतासाची चाल = ३ मैल .

५. एक ससा आपल्या ५० उड्या कुऱ्यापुढें आहे , बजितक्या वेळांत कुत्रा ३ उड्या मारितो तितक्या वेळांत ससा ४ उड्या मारितो . परंतु कुऱ्याच्या २ उड्या सशाच्या ३ उड्यांबरोबर आहेत ; तर सशास धराबयास कुऱ्यास किती उड्या माराच्या लागतील ?

ज्या उड्या कुऱ्यास माराच्या लागतील त्या = १५५ .

२ : १५ :: ३ :  $\frac{३१५}{२}$  = निघाल्या पासून कुऱ्याच्या हातीं लागेपर्यंत ज्या सशाच्या उड्या त्या .

३ : १५ :: ४ :  $\frac{४१५}{३}$  = कुत्रा निघाल्या पासून सशाच्या ज्या उड्या त्या .

$$\therefore \frac{३१५}{२} - ५० = \frac{४१५}{३} ;$$

$$९१५ - ३०० = ८१५ .$$

$$१५ = ३०० \text{ हें उत्तर .}$$

६. एक मनुष्य जुवा खेळाबयास बसला असतां खेळतां खेळतां आपल्या पैशाचा  $\frac{१}{४}$  हरला , आणि मग त्यानें तीन रुपये जिंकिले ; नंतर त्याजबळ जें द्रव्यजमलें त्याचा  $\frac{१}{३}$  तो हरला ; आणि पुनः त्यानें २ रुपये

जिंकिले, आणि शेवटी त्याजबळ जो पैसा झाला त्या-  
चा ठे पुन तो हरला आणि पहातो तों जबळ १२ रुपये  
राहिले. नर तो खेळा बयास बसला तेव्हां त्याजबळ  
किती रुपये होते ?

त्याजबळ मुढीं जें द्रव्य होतें तें = ६९ रुपये घे.

नर  $\frac{६९}{४}$  त्यानें गमावला ;

$६९ - \frac{६९}{४} = \frac{२६९}{४}$  इतकें द्रव्य त्याजबळ बाकी राहिलें ;

$\therefore \frac{२६९}{४} + ३ = \frac{२६९ + १२}{४}$  ही त्याची ३ रुपये जिंकल्यावरची जमा ;

$\frac{६९ + ४}{४}$  इतकें द्रव्य त्यानें दुसरे वेळेस गमाविलें ,

$\therefore \frac{२६९ + १२}{४} - \frac{६९ + ४}{४} = \frac{२६९ + ८}{४} = \frac{६९ + ४}{२}$  ही त्याची  
बाकी ,

$\frac{६९ + ४}{२} + २ = \frac{६९ + ८}{२}$  ही त्याची २ रु० जिंकिल्याव-  
रची जमा.

$\therefore \frac{६९ + ८}{२}$  इतकें द्रव्य त्यानें तिसरे वेळेस गमाविलें ,

$\frac{६९ + ८}{२} - \frac{६९ + ८}{२} = \frac{७६९ + ४६}{२} - \frac{६९ + ८}{२} = \frac{६९ + ४८}{२}$  ही

त्याची शेवटची बाकी ,

$$\therefore \text{प्रश्नाप्रमाणे, } \frac{६९+८}{४} = १२,$$

$$\frac{६९+८}{१४} = २;$$

$$६९+८ = २८$$

$$\therefore ६९ = २० \text{ रुपये हे उत्तर.}$$

७. पायदळ लोकांची एक टोळी घोडेस्वारांपुढे आ-  
पल्या ११६५ पावलांवर आहे; आतां घोड्यांच्या तीन  
पावलांचें अंतर पायदळांच्या चार पावलांचे अंतराब-  
रोबर आहे, आणि जितक्या वेळांत पायदळ ५ पावलें  
जातात तितक्या वेळांत घोडे ४ पावलें जातात, तर पाय-  
दळास गांठीत तोंपर्यंत घोड्यांस किती पावलें चाललीं  
पाहिजेत?

घोड्यांस जितकीं पावलें चाललीं पाहिजेत तीं = क्षधर,  
तर घो.पा. : घो.पा. : पा.पा. :  $\frac{४६९}{९}$  = निघाल्या पासून घो-  
डेस्वारांची गांठ पडे तोंपर्यंत जीं पायदळांचीं पावलें तीं.

घो.पा. : घो.पा. : पा.पा. :  $\frac{५६९}{४}$  = घोडेस्वार निघा-  
ल्या पासून घोडेस्वार गांठीत तोंपर्यंत जीं पायदळांचीं पा-  
वलें तीं.

$$\therefore \frac{४६४}{४} - ११६१ = \frac{४६४}{४} ;$$

$$१६६४ - १३१८० = १५६४$$

$$१६६४ - १५६४ = १३१८०$$

$$\therefore ६४ = १३१८०$$

एका नावाडयास कांहीं वेळ रेषा केल्यावरून अंत कळून आले कीं. भरतीच्या साहाय्यानें अपासून व पावेतो (ज्यांचे मध्ये १८ मैल अंतर आहे) १३ तासांत होडी नेता येते; आणि कांगडी मध्यापक्षां पाण्याचा जोर दुप्पट आहे म्हणून व पासून अकडे परत येतांना तो कांगडी कांगडीनें जरी येतो तरी त्यास २३ तास लागतात. त्यावरून भरतीच्या वेळेस मध्यभागीं जेथें पाण्याचा जोर अत्यंत तेथें एके तासांत पाणी किती लांब जातें?

भरती असतां दर तासांत मध्ये पाणी जे मैल जातें ते = ६४ ये, तर ..... कांगडी ..... =  $\frac{३६४}{४}$ . आणि  $\frac{१८}{१+३} = १२$  मैल = भरतीच्या साहाय्यानें तो मध्यभागीं होडी दर तासांत जे मैल नेतो ते ;

$\therefore १२ - ६४ =$  भरती नसतां एके तासांत होडी जे मैल नेतो ते.

पुनः  $\frac{15}{24} = 6$  आंगावरच्या भरतींत कांठाकांठांनं  
तो होडी दरतासांत जे भेल आणतो ते,

$\therefore 6 + \frac{35}{4} =$  भरती नसतांदरतासांत होडी जे भेल  
आणतो ते.

$$\text{म्हणून } 92 - 5x = 6 + \frac{35}{4} ;$$

$$60 - 5x = 40 + 35 ;$$

$$65x = 20$$

$\therefore 5x = 2\frac{1}{2} =$  भरती असतां मध्यभागी  
अत्यंत जोराचे ठिकाणी पाणी दरतासांत जे भेल बाह-  
तें ते.

### समीकरणें.

१.  $\frac{4x}{5} + \frac{2}{3} = x + \frac{1}{3}$ . उत्तर.  $x = 2$ .

२.  $\frac{3x-4}{2} = \frac{x}{2} + \frac{x}{4} + 1$ . उत्तर.  $x = 4$ .

३.  $4x - \frac{5x+3}{11} = \frac{3x+14}{2} - 3$ . उत्तर.  $x = 9$ .

४.  $\frac{4}{x} + 2 = \frac{24}{x} - \frac{1}{2}$ . उत्तर.  $x = 6$ .

५.  $\frac{x}{2} - 1 + \frac{x}{3} - \frac{x+4}{4} = -\frac{11}{4}$ .

उत्तर. क्ष = १२.

$$६. \frac{क्ष+अ}{ब} - \frac{क्ष}{अ} = १.$$

उत्तर. क्ष = -अ.

$$७. \frac{ब}{अक्ष} - अ = ब - \frac{अ}{बक्ष} \quad \text{उत्तर. क्ष} = \frac{१}{अब}$$

$$८. \frac{अ(ब+क्ष)}{बक्ष} = अक + \frac{अ}{ब} क्ष.$$

उत्तर. क्ष =  $\frac{ब}{क}$

प्रश्न.

१. दाहा वर्षां मागे एका मुलाचें वय त्याच्या बापाच्या बयाचा दशमांश होते, परंतु ते आतां चतुर्थीस आहे. तर त्या दोघांचीं वयें काय आहेत?

उत्तर १५ आणि ६०.

२. अशी एक संख्या काढ, कीं जिच्या तिपटींतून वजा करून जी बाकी राहिल तिचें अर्ध केल्यास तें, त्याच संख्येंतून दोन वजा करून जी बाकी राहिल ती बरोबर होईल.

उत्तर. ४.

३. असा एक अपूर्णांक काढ, कीं त्याच्या अशांत एक मिळविला असतां त्याची किंमत  $\frac{१}{२}$  होईल; आणि

छेदांतून एक वजा केला असता त्याची किंमत  $\frac{1}{4}$  होईल.

उत्तर.  $\frac{3}{4}$ .

४. अ, ब, आणि क ह्या तिघांमध्ये १२२ रुपये बांटून घाबयाचे आहेत, ते असे कीं, ब स अच्या द्रव्याचे  $\frac{5}{11}$  येतील, आणि क स अच्या आणि बच्या द्रव्याचे  $\frac{5}{11}$  येतील; तर प्रत्येकाचा बांटा काय होईल?

उत्तर, अ ४० रु०; ब ३२ रु०; आणि क ६० रु०.

५. अजबळ कांहीं मोहोरा होत्या, आणि त्यास बाटेनें त्याचे ब आणि क असे दोन सावकार भेटले, ते-  
कां त्यानें आपल्या द्रव्याचे  $\frac{2}{3}$  ब स दिले व बाकीच्या द्रव्याचे  $\frac{1}{3}$  क स दिले; आणि पाहातो तो ११ मोहोरा बाकी राहिल्या; तर त्याजबळ प्रथमतः द्रव्य किती होते?

उत्तर. ११० मोहोरा.

६. एका मनुष्यानें आपल्या द्रव्याच्या  $\frac{1}{2}$  चे घोडे घेतले,  $\frac{1}{3}$  चे बैल घेतले, आणि बाकीच्या द्रव्याच्या  $\frac{1}{6}$  चीं मेंढरें घेतलीं; आणि पाहातो तो जवळ ९८ रुपये राहिले; तर त्याजबळ प्रथमतः द्रव्य किती होते?

उत्तर २४० रुपये.

## प्रकरण ३.

### घातकरणे.

(१९) कोणत्याही पदास विवक्षित वेळां त्याच पदानें गुणणें ह्यास त्या पदाचा घातकरणें असें म्हणतात.

जसें,  $अ \times अ = अ^२ \times अ^१ = अ^{१+१} = अ^२ = अ$  चा दुसरा घात अथवा वर्ग.

$$अ \times अ \times अ = अ^२ \times अ^१ = अ^{२+१} =$$

$अ^३ = अ$  चा तिसरा घात अथवा घन.

$$अ \times अ \times अ \times अ \dots \dots \dots \text{नसंख्येपर्यंत} =$$

$$अ^{१+१+१+\dots \dots \dots \text{नपर्यंत}} = अ^n$$

$$\text{पुनः, } अ^२ \times अ^२ \times अ^२ = अ^{२+२+२} = अ^{२ \times ३} = (अ^२)^३ = अ^६$$

$$अ^n \times अ^n \times अ^n \dots \dots \dots \text{मसंख्येपर्यंत} =$$

$$अ^{n+n+n \dots \dots \dots \text{मपर्यंत}} = अ^{n \times म} = अ^{nm}$$

त्यावरून कोणत्याही पदाचा कोणताही घात करण्याचा असा नियम निघतो कीं, पदाचे घातप्रकाशकास त्या पदाचा जो घात करावाचा आहे, त्या अंकांनं गुणावें, गुणाकार त्या पदाचा तो विवक्षित



घातयेतो .

$$\sqrt{अ} \times \sqrt{अ} = अ^{\frac{1}{2}} \times अ^{\frac{1}{2}} = अ^{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}} = अ^1 = अ,$$

$$\sqrt{अ} \times \sqrt{अ} = अ^{\frac{1}{2}} \times अ^{\frac{1}{2}} = अ^{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}} = अ^1 = अ,$$

$$\sqrt{अ} \times \sqrt{अ} \times \sqrt{अ} = अ^{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}} = अ^{\frac{3}{2}} = अ^1 \times अ^{\frac{1}{2}} = अ \sqrt{अ}.$$

$$(-अ)^1 = -अ \times -अ = अ^1,$$

$$(-अ)^2 = -अ \times -अ \times -अ = -अ^3,$$

$$(-अ)^3 = -अ \times -अ \times -अ \times -अ = अ^4;$$

इ०

इ०

इ०

स्यावरून असें सिद्ध होतें, कीं कृण पदांचा समघात घनयेतो, आणि कृण पदांचा विषम घात कृण येतो.

$$(अ+ब)^1 = (अ+ब) \times (अ+ब) = अ^2 + २अब + ब^2,$$

$$(अ-ब)^1 = (अ-ब) \times (अ-ब) = अ^2 - २अब + ब^2,$$

$$(अ+ब)^2 = (अ+ब) \times (अ+ब) \times (अ+ब) =$$

$$अ^3 + ३अ^2ब + ३अब^2 + ब^3 = अ^3 + ब^3 + ३अब(अ+ब),$$

$$(अ-ब)^2 = (अ-ब) \times (अ-ब) \times (अ-ब) =$$

$$अ^3 - ३अ^2ब + ३अब^2 - ब^3 = अ^3 - ब^3 - ३अब(अ-ब).$$

ह्या शेवटल्या दोन संतरण्यावरून असा नियम बांधतां येतो, कीं कोणत्याही दोन पदांच्या बेरजेचा

घन, त्यांच्या घनांची बेरीज व त्यांच्या गुणाकाराच्या तिपटीस त्यांच्या बेरजेने गुणून जो गुणाकार येतो, त्यांचे बेरजे बरोबर आहे; व कोणत्या दोन पदांच्या वजाबाकीचा घन, त्यांच्या घनांच्या वजाबाकीतून, त्यांच्या गुणाकाराच्या तिपटीस त्यांचे वजाबाकीने गुणून जो गुणाकार येतो, तो वजा करून जी बाकी राहाते, त्या बाकी बरोबर आहे.

$$(a+b+c)^3 = \{(a+b)+c\}^3 = (a+b)^3 + 3c(a+b) + c^3 \\ = a^3 + 3ab + b^3 + 3ac + 3bc + c^3.$$

$$(a+b+c+d)^3 = \{(a+b)+(c+d)\}^3 = \\ (a+b)^3 + 3(a+b)(c+d) + (c+d)^3.$$

$$(a+b-c-d)^3 = \{(a+b)-(c+d)\}^3 = \\ (a+b)^3 - 3(a+b)(c+d) + (c+d)^3.$$

### उदाहरणे.

१. असें दाखवा कीं,  $(x-2a)^3 = x^3 - ४ax^2 + ४a^2x$ .

२.  $\dots (x + \frac{1}{x})^3 = x^3 + ३ + \frac{१}{x^3}$ .

$$३. \dots\dots (क्ष + \frac{१}{२})^२ = क्ष^२ + पक्ष + \frac{१}{४}.$$

$$४. \dots\dots (२क्ष - ३य)^२ = ४क्ष^२ - १२क्षय + ९य^२.$$

$$५. \dots\dots (२क्ष - १)^२ = ४क्ष^२ - ४क्ष + १.$$

$$६. \dots\dots (अ + ब)^२ = अ^२ + ४अब + ६अब^२ + ४अब + ब^२.$$

$$७. \dots\dots (अ - क्ष)^२ = अ^२ - ४अक्ष + ६अक्ष^२ - ४अक्ष + क्ष^२.$$

$$८. \dots\dots (क्ष + य)^२ = क्ष^२ + ९क्षय + १०क्षय^२ + १०क्षय^२ + ९क्षय + य^२.$$

$$९. \dots\dots (स - ज्ञ)^२ = स^२ - ५सज्ञ + १०सेज्ञ - १०सैज्ञ + ५सज्ञ - ज्ञ^२.$$

$$१०. \dots\dots (क्ष^२ + य^२)^२ = क्ष^२ + २क्ष^२य^२ + य^२ = क्ष^२ + २\sqrt{क्षय} + य$$

$$११. \dots\dots (क्ष - \sqrt{य})^२ = क्ष^२ - २क्ष\sqrt{य} + य.$$

$$१२. \dots\dots (क्षय + \sqrt{य})^२ = क्ष^२य + २क्ष\sqrt{य} + य.$$

$$१३. \dots\dots (क्ष^२ - य^२)^२ = क्ष^२ - ३क्षय^२ + ३क्षय^२ - य^२.$$

$$१४. \dots\dots (क्ष + १)^२ = क्ष^२ + ४क्ष + ६क्ष + ४क्ष + १.$$

$$१५. \dots\dots \{(अ + ब)^२ - (अ - ब)^२\} = २ब - ३(अ + ब) \\ \times (अ - ब) \{(अ + ब)^२ - (अ - ब)^२\}$$

## मूळकाढणे.

(१३) कोणत्याही एकाद्या पदास ज्या दुसऱ्या पदानें विवक्षित वेळां भागून भाग बरोबर तुटतो त्या दुसऱ्या पदास पहिल्या पदाचें मूळ म्हणतात.

अचा वर्ग अ<sup>३</sup> आहे म्हणून अ<sup>३</sup>चें वर्गमूळ अ आहे.  
अचा घन अ<sup>३</sup> आहे म्हणून अ<sup>३</sup>चें घनमूळ अ आहे.

अचें वर्गमूळ  $\sqrt{अ}$  अथवा अ<sup>१/२</sup> आहे;  $\therefore \sqrt{अ} \times \sqrt{अ} = अ$ , आणि अ<sup>१/२</sup>  $\times$  अ<sup>१/२</sup> = अ<sup>१</sup> = अ.

अचें घनमूळ  $\sqrt[३]{अ}$  अथवा अ<sup>१/३</sup> आहे.

अचें नमूळ  $\sqrt[४]{अ}$  अथवा अ<sup>१/४</sup> आहे.

अ<sup>३</sup>चें घनमूळ  $\sqrt[३]{अ^३}$  अथवा अ<sup>३/३</sup> आहे.

अ<sup>३</sup>चें ममूळ  $\sqrt[४]{अ^३}$  अथवा अ<sup>३/४</sup> आहे.

द्यावरून कोणत्याही एकाकी पदाचें मूळ काढण्याचा असा नियम निघतो कीं, पदाच्या घात प्रकाशाकस जितकें मूळ काढावयाचें आहे त्या अंकाचें भागाचें, भागाकार विवक्षित मूळ घेतें.

$\therefore + अ \times + अ = + अ$ , आणि  $- अ \times - अ = + अ$ ,

$$\therefore \sqrt{अ^२} = +अ, किंवा -अ.$$

ह्यावरून असें दिसतें कीं, कोणत्याही एकाकी धन पदाचें वर्गमूळ धन किंवा ऋण आहे. परंतु जर तें धनपद ऋण पदाचा वर्ग आहे असें माहीत आहे तर त्याचें वर्ग-मूळ ऋण धरावें.

$$\therefore +अ \times +अ \times +अ = +अ^३, आणि -अ \times -अ \times -अ = -अ^३,$$

$$\therefore \sqrt{अ^३} = +अ, आणि \sqrt{-अ^३} = -अ.$$

ह्यावरून असें दिसतें कीं, कोणत्याही एकाकी धनपदाचें घनमूळ धन आणि ऋणपदाचें घनमूळ ऋण आहे.

$\therefore$  असें कोणतेंही पद नाही कीं ज्यास ज्यानें गुणिलें असतां गुणाकार—अ येईल,  $\therefore -अ$ चें वर्गमूळ निघावयाचें नाही.

$अ^२ + २अब + ब^२$  हा  $(अ + ब)$  चा वर्ग आहे म्हणून ह्याचे योगानें द्विपदाचें वर्गमूळ काढण्याचा नियम आपणास बांधतां येईल; कांकीं,  $अ^२ + २अब + ब^२$  हे  $अ^२ + (२अ + ब)ब$ ; आणि  $\therefore$   $अ$ चें वर्गमूळ  $अ$  आहे, व हे मूळांतील पहिलें पद आहे, म्हणून आतां

आपणास असा कांहीं भाजक काढिला पाहिजे कीं, ज्या-  
नें भागिलें असतां + बहा भागाकार येईल, आणि हें उ-  
पड आहे कीं तो भाजक २अ + ब, म्हणजे मूळांतील  
पहिल्या पदाची दुप्पट व दुसरे पद ह्यांची बेरीज, आ-  
हे.

ह्यावरून अ<sup>३</sup>+२अब+ब<sup>३</sup> ह्याचें वर्गमूळ का-  
ढावयाचें आहे, तर पहिल्यानें अ<sup>३</sup>चें मूळ अ हें घ्यावें,  
आणि ते मूळस्थानीं लिहावें, आणि त्याचा वर्ग अ<sup>३</sup>+  
२अब+ब<sup>३</sup> ह्यांतून वजा करावा; मग भाजकाक रितां  
अ ह्या मूळाची दुप्पट करवी, आणि हिनें बाकी राहिले-  
ल्या पदास भागावें म्हणजे (२अ+ब) ब ह्यांस २अनीं  
भागावे, आणि जो भागाकार येईल तो मूळस्थानीं लि-  
हावा, व भाजकास त्याच्या चिन्हासहित जोडावा; मग  
२अ+ब ह्यास दुसरे पद म्हणजे ब ह्यानें गुणून तो  
गुणाकार वजा करावा. हीरीति खालच्या उदाहरणांत  
करून दाखवितों.

अ<sup>३</sup>+२अब+ब<sup>३</sup> (अ+ब

२अ+ब) अ<sup>३</sup>

२अब+ब<sup>३</sup>

२अब+ब<sup>३</sup>

हा नियम १२२५ ह्या संग्रह्येचें वर्गमूळ काढण्यास लावून पाहू.

$$\begin{array}{r} १२२५ \text{ (३०+५, अथवा ३५, } \\ ९००\cancel{०} \\ ६०+५, \text{ अथवा ६५) } ३२५ \\ \underline{३२५} \end{array}$$

अ<sup>३</sup>+२अब+२अक+२बक+ब<sup>३</sup>+क<sup>३</sup> ह्याचें वर्गमूळ काढावयाचें आहे असें मान ;

अ<sup>३</sup>+२अब+२अक+२बक+ब<sup>३</sup>+क<sup>३</sup> (अ+ब+क.

$$\begin{array}{r} \text{अ}^3 \\ २अ+ब ) \text{ २अब } \qquad + ब^3 \\ \underline{\text{२अब}} \qquad \qquad + ब^3 \\ २अ+२ब+क ) \text{ २अक+२बक } + क^3 \\ \underline{\qquad \qquad \qquad २अक+२बक } + क^3 \end{array}$$

ह्या उदाहरणांत अ+ब हीं दोन पदे निघाल्या-  
नंतर बाकी राहिलेलें पद क<sup>३</sup> हें काढण्याकरितां मूळस्था-  
नच्या पहिल्या दोन पदांची नव्या भाजकाकरितां दुप्पट  
केली आहे.

(अ+ब) हें अ<sup>३</sup>+३अब+३अब<sup>२</sup>+ब<sup>३</sup> ह्याचें

※ व्यवहारांतील पूर्णांकाचेरीतींत ही शेन्ती शूचें गाळतां येतील.

घनमूळ आहे, म्हणून त्याचे योगानें घनमूळ काढण्याचा नियम आपणास बांधतां येईल. पहिलें पद  $\text{अ}^३$  त्याचें घनमूळ अ आहे, हें मूळांतील पहिलें पद आहे. सगळ्या पदांतून त्याचा घन वजा करावा, मग भाजकाकरितां  $\text{अ}^३$  घ्यावे, आणि त्यांनीं बाकींतील पहिलें पद भागिलें असतां जो भागाकार व येईल तो मूळांतील दुसरे पद होईल; मग त्या भाजकांत  $\text{अ}^३$  अव + ब<sup>३</sup> मिळवून त्याचेर जे सवनें गुणिलें म्हणजे  $\text{अ}^३$  व +  $\text{अ}^३$  व<sup>३</sup> + व<sup>३</sup> हा गुणाकार येतो, तो बाकीवरोंवर आहे.

ही रीति ग्यालच्या उदाहरणांत करून दाखवितों.

$$\text{अ}^३ + ३\text{अ}^२\text{व} + ३\text{अव}^२ + \text{व}^३ \quad (\text{अ} + \text{व})$$

$$\begin{array}{r} \text{अ}^३ \\ ३\text{अ}^३ + ३\text{अव} + \text{व}^३ ) \quad ३\text{अ}^२\text{व} + ३\text{अव}^२ + \text{व}^३ \\ \underline{३\text{अ}^२\text{व} + ३\text{अव}^२ + \text{व}^३} \end{array}$$

हा नियम आपण १११२५ ह्या संख्येचें घनमूळ काढण्यास लावून पाहूं.

$$१११२५ \quad \begin{array}{c} \text{अ} \quad \text{व} \\ १४० + ५, \text{अथवा } ४५. \end{array}$$

$$\text{अ}^३ = ६४०००$$

$$३\text{अ}^२ = ३ \times ४० = ४८०० \quad \underline{१०१२५}$$



$$३ अ^३ = ३ \times ४^३ \times ५ = २४०००$$

$$३ अब^३ = ३ \times ४^० \times ५^३ = ३०००$$

$$ब^३ = ५^३ = \frac{१२५}{२७१२५}$$

गणितांनील साधारण रीति अशी आहे .

$$२७१२५ (४५)$$

$$६४$$

$$४^३ \times ३ = ४५) २७१२५$$

$$५^३ = १२५$$

$$५^३ \times ४ \times ३ = ३००$$

$$५ \times ४^३ \times ३ = २४०$$

उदाहरणं .

१. ४ अ<sup>३</sup> + ४ अब + ब<sup>३</sup> यांचें वर्गमूळ काढ .

$$४ अ^३ + ४ अब + ब^३ (२ अ + ब = मूळ .$$

$$\begin{array}{r} ४अ^३ \\ ४अ + ब ) \overline{४अब + ब^३} \\ \underline{४अब + ब^३} \end{array}$$

२.  $\sqrt{(२९१२५ + ३०१२५ + १२१२५ + २५०० + ४१२५)}$

$$\begin{array}{r}
 ११क्षयै+२०क्षयै+३०क्षयै+१२क्षयै+२९यै+४क्षयै \\
 ११क्षयै \quad (३क्षयै+२क्षयै+९यै) \\
 \hline
 ६क्षयै+२क्षयै) \quad १२क्षयै \quad +४क्षयै \\
 \quad १२क्षयै \quad +४क्षयै \\
 \hline
 ६क्षयै+४क्षयै+९यै) \quad ३०क्षयै+२०क्षयै+२९यै \\
 \quad ३०क्षयै+२०क्षयै+२९यै \\
 \hline
 \end{array}$$

ह्या उदाहरणांत २०क्षयै = ११क्षयै + २०क्षयै व. जस-  
जमें सोईस पडलें तसतशीं दुसरीं पदें खालीं घेतलीं आ-  
हेत .

$$\begin{array}{l}
 ३. \sqrt{अ-क्ष} \\
 अ-क्ष (अ-\frac{क्ष}{२अ} - \frac{क्ष}{८अ} - \frac{क्ष}{१६अ} - \text{इत्यादि} = मूळ. \\
 अ \\
 २अ-\frac{क्ष}{२अ}) - क्ष \\
 \quad -क्ष + \frac{क्ष}{४अ} \\
 २अ-\frac{क्ष}{२अ} - \frac{क्ष}{८अ}) - \frac{क्ष}{४अ} \\
 \quad -\frac{क्ष}{४अ} + \frac{क्ष}{८अ} + \frac{क्ष}{६४अ} \\
 २अ-\frac{क्ष}{२अ} - \frac{क्ष}{४अ}) - \frac{क्ष}{८अ} - \frac{क्ष}{६४अ}
 \end{array}$$

येथे ही कृति संभावयाची नाही, व जें मूळ आहे तें  $\sqrt{अ-क्ष}$  ह्याचे किमतीचे जवळजवळ मान आहे.

४.  $८अ-८४अक्ष+२९४अक्ष^२-३४३क्ष^३$  ह्याचें घनमूळ काढ.

$$८अ-८४अक्ष+२९४अक्ष^२-३४३क्ष^३ \quad (२अ-७क्ष)$$

$८अ$

$$(२अ) \times ३ = ६अ \quad \frac{-८४अक्ष+२९४अक्ष^२-३४३क्ष^३}{-८४अक्ष}$$

$$(-७क्ष)(२अ) \times ३ = -८४अक्ष$$

$$(-७क्ष)(२अ) \times ३ = +२९४अक्ष^२$$

$$(-७क्ष)^३ = -३४३क्ष^३$$

$$\frac{-८४अक्ष+२९४अक्ष^२-३४३क्ष^३}{-३४३क्ष^३}$$

५. २। (अ+३अव+३अंक+३अवक+३अक+३वक+३वक+३क).

$$अ^3 + ३अ^२ब + ३अक + ३अब^२ + ६अबक + ३अक^२ + ३बक^२ + ३क^३ (अ+ब+क)$$

$$\begin{pmatrix} 3\alpha^2 & 3\alpha\beta \\ 3\alpha & 3\beta^2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3\alpha^2 & 3\alpha\beta \\ 3\alpha & 3\beta^2 \end{pmatrix}$$

$$b \times a^3 \times c =$$

$$= \frac{1}{6} \times 9 \times 3^2$$

॥ ॥

$$(अ+ब)^3 \times 3 = 3अ^3 + 6अब + 3ब^3 \quad 3अ^3 + 6अब + 3अब^2 + 3ब^3$$

$$क \times (अ + व) \times ३ = ३ अंक + ६ अवक + ३ कव$$

$$k \times (a+b) \times 3 =$$

$$\begin{array}{ccc} \frac{m}{n} + & & \\ & \parallel & \\ & & \frac{m}{n} \end{array}$$

$$3\text{अंक} + 6\text{अबक} + 3\text{अंक} + 3\text{बक} + 3\text{कव} + \text{क} :$$

६. अमें दाखीव कीं,  $\sqrt{४क्ष^३-४अक्ष+अ^३} = २क्ष-अ$ .
७.  $\sqrt{१-८अ+१६अ^२} = १-४अ$ .
८.  $\sqrt{२५अ^३+४०अक्ष+१६क्ष^३} = ५अ+४क्ष$ .
९.  $\sqrt{९क्ष^३-३क्ष+\frac{१}{६}} = ३क्ष-\frac{१}{३}$ .
१०.  $\sqrt{४९अ^३+४२अ^२ब+९ब^३} = ७अ^३+३ब$ .
११.  $\sqrt{(क्ष^३-२अक्ष+अ^३+२क्ष-२अ+१)} = ९क्ष-अ+१$ .
१२.  $\sqrt{(म^३+२म-१-\frac{२}{म}+\frac{१}{म^२})} = म+१-\frac{१}{म}$ .
१३.  $\sqrt{(\frac{अ^३}{क्ष^३}-२+\frac{क्ष^३}{अ^३}+\frac{२अ^३}{क्ष}-२क्ष+अ^३)} = \frac{अ}{क्ष}-\frac{क्ष}{अ}+अ$ .
१४.  $\sqrt[३]{(अ^३-३अक्ष+३अक्ष^२-क्ष^३)} = अ-क्ष$ .
१५.  $\sqrt[३]{(१-१२अ+४८अ^२-६४अ^३)} = १-४अ$ .
१६.  $\sqrt[३]{(८अ^३+३६अ^२ब+५४अब^२+२७ब^३)} = २अ+३ब$ .
१७.  $\sqrt[३]{(क्ष^३-६क्ष^२+१५क्ष-२०+१५क्ष^२-६क्ष+१)}$   
 $= ९क्ष^३-२क्ष+१$ .
१८.  $\sqrt[३]{(य^३-६य^२+६य^२+१६य^३-१२य^३-२४य-८)}$   
 $= य^३-२य-२$ .

## प्रकरण ४

### करणी.

(१४) करणी अथवा खंडपदें तींच होत कीं, ज्यांचीं मुळें बरोबर समजत नाहीत; जसें,

$\sqrt{३}$ ,  $\sqrt{५}$ ,  $\sqrt{४३}$ ,  $\sqrt{३३}$ ,  $\sqrt{१+२५}$ ,  $\sqrt{२५+१}$  अक्ष, आणि  $\sqrt{२२५}$ , हीं पदें खंड आहेत.

हीं मुळें अपूर्णांक घातप्रकाशकांनीं ही दाखवितां येतात; जसें,  $\sqrt{३}$ ,  $\sqrt{५}$ ,  $\sqrt{४३}$ ,  $\sqrt{३३}$ ,  $(१+२५)\sqrt{१}$ ,  $(२५+१)\sqrt{१}$ , आणि  $(२२५)\sqrt{१}$ .

कोणत्याही असंड पदाम करणीचें रूप देतां येईल; जसें,  $\sqrt{२५} = \sqrt{२५ \times १} = ५\sqrt{१}$ ,  $\sqrt{२५-१} = \sqrt{(२५-१)\sqrt{१}}$   $= (२५-१)\sqrt{१}$ ,  $\sqrt{२५} = ५\sqrt{१}$ ,  $\sqrt{२५} = ५\sqrt{१}$ ,  $\sqrt{२५} = ५\sqrt{१}$ .

### उदाहरणें.

१. असें सिद्ध कर कीं,  $\sqrt{२५३} + \sqrt{२७} + \sqrt{४८} = १६\sqrt{३}$ .

$$\sqrt{२५३} = \sqrt{८१ \times ३} = ९\sqrt{३}$$

$$\sqrt{२७} = \sqrt{९ \times ३} = ३\sqrt{३}$$

$$\sqrt{४८} = \sqrt{१६ \times ३} = ४\sqrt{३}$$

$$\therefore \sqrt{25} + \sqrt{9} + \sqrt{16} = 5\sqrt{1} + 3\sqrt{1} + 4\sqrt{1} \\ = (5+3+4)\sqrt{1} = 12\sqrt{1}.$$

२. असें सिद्ध कर कीं,  $2\sqrt{12} \times 3\sqrt{12} - 7\sqrt{12} \times 4\sqrt{12} + 5\sqrt{12} \times 3\sqrt{12} - \sqrt{12} \times 4\sqrt{12} = (13\sqrt{12} - 4\sqrt{12}) \sqrt{12}$ .

$$2\sqrt{12} \times 3\sqrt{12} = 2 \times 3 \times \sqrt{12} \times \sqrt{12} = 6 \times 12 = 72 \\ - 7\sqrt{12} \times 4\sqrt{12} = -7 \times 4 \times \sqrt{12} \times \sqrt{12} = -28 \times 12 = -336 \\ = -336 + 72 = -264$$

$$5\sqrt{12} \times 3\sqrt{12} = 5 \times 3 \times \sqrt{12} \times \sqrt{12} = 15 \times 12 = 180 \\ - \sqrt{12} \times 4\sqrt{12} = -1 \times 4 \times \sqrt{12} \times \sqrt{12} = -4 \times 12 = -48$$

$$\text{आणि } 72 - 336 + 180 - 48 = (72 - 336 + 180 - 48) = -132 \\ = -132 \times 12 = -1584$$

३.  $4\sqrt{3} + 5\sqrt{2}$  त्यांस  $\sqrt{3} + 2\sqrt{2}$  त्यांनी गुण.

हा गुणाकार बीजांतील साधारणपदांच्या गुणाकाराप्रमाणेच करता येईल; म्हणजे,

$$4\sqrt{3} + 5\sqrt{2}$$

$$\sqrt{3} + 2\sqrt{2}$$

$$4 \times \sqrt{3} + 5 \times \sqrt{2}$$

$$1 \times \sqrt{3} + 2 \times 2$$

$$\frac{4\sqrt{3} + 13\sqrt{2} + 10}{1} = 4\sqrt{3} + 13\sqrt{2} + 10$$

४. असें सिद्ध कर कीं,  $१२\sqrt{३} + ३\sqrt{३२} = \frac{३७}{४}\sqrt{२}$ .

$$१२\sqrt{३} = १२\sqrt{\frac{३}{२}} = \frac{१२}{२}\sqrt{२},$$

$$३\sqrt{३२} = ३\sqrt{\frac{३२}{४}} = \frac{३}{४}\sqrt{२};$$

$$\text{आणि } \frac{१२}{२}\sqrt{२} + \frac{३}{४}\sqrt{२} = \frac{२४}{४}\sqrt{२} + \frac{३}{४}\sqrt{२} = \frac{३७}{४}\sqrt{२}$$

५.  $(२\sqrt{८} + ३\sqrt{९} - ७\sqrt{२})$  आणि

$(\sqrt{७२} - ५\sqrt{२०} - २\sqrt{२})$  ह्यांस अतिसरळ रूप दे, आणि ह्यांना गुणाकार काढ.

$$२\sqrt{८} = २\sqrt{४ \times २} = २ \times २\sqrt{२} = ४\sqrt{२},$$

$$\therefore २\sqrt{८} + ३\sqrt{९} - ७\sqrt{२} = ४\sqrt{२} + ३\sqrt{९} - ७\sqrt{२} \\ = ३\sqrt{९} - ३\sqrt{२};$$

$$\sqrt{७२} = \sqrt{३६ \times २} = ६\sqrt{२},$$

$$\text{आणि } -५\sqrt{२०} = -५\sqrt{४ \times ५} = -५ \times २\sqrt{५} = -१०\sqrt{५},$$

$$\therefore \sqrt{७२} - ५\sqrt{२०} - २\sqrt{२} = ६\sqrt{२} - १०\sqrt{५} - २\sqrt{२} \\ = ४\sqrt{२} - १०\sqrt{५};$$

$$३\sqrt{९} - ३\sqrt{२}$$

$$४\sqrt{२} - १०\sqrt{५}$$

$$१२\sqrt{१०} - १२ \times २$$

$$- ३० \times ५ + ३०\sqrt{१०}$$

$$\hline ४२\sqrt{१०} - २४ - १५० = ४२\sqrt{१०} - १७४.$$



६.  $\frac{अ+ब\sqrt{-१}}{अ-ब\sqrt{-१}} + \frac{अ-ब\sqrt{-१}}{अ+ब\sqrt{-१}}$  हे एका अपूर्णपदांत आण.

ह्यांस समच्छेद केल्यानें,

$$\frac{अ+ब\sqrt{-१}}{अ-ब\sqrt{-१}} \times \frac{अ+ब\sqrt{-१}}{अ+ब\sqrt{-१}} = \frac{अ^२+२अब\sqrt{-१}+ब^२(-१)}{अ^२-ब^२(-१)}$$

$$= \frac{अ^२+२अब\sqrt{-१}-ब^२}{अ^२+ब^२},$$

$$\frac{अ-ब\sqrt{-१}}{अ+ब\sqrt{-१}} \times \frac{अ-ब\sqrt{-१}}{अ-ब\sqrt{-१}} = \frac{अ^२-२अब\sqrt{-१}+ब^२(-१)}{अ^२-ब^२(-१)}$$

$$= \frac{अ^२-२अब\sqrt{-१}-ब^२}{अ^२+ब^२};$$

म्हणून बेरीज घेतल्यानें,

$$\frac{अ+ब\sqrt{-१}}{अ-ब\sqrt{-१}} + \frac{अ-ब\sqrt{-१}}{अ+ब\sqrt{-१}} = \frac{२अ^२-२ब^२}{अ^२+ब^२} = \frac{२(अ^२-ब^२)}{अ^२+ब^२}.$$

ह्या उदाहरणावरून द्वियुग्मदकरणीचें अखंड पद करण्याची रीति निघते. कारण, ह्या उदाहरणांतील अपूर्णपदांचे छेद अशा एका पदानें गुणिले कीं, ज्या गुणाकारानें ते अखंड पद झाले.  $(१+य)(१-य) = (१-य^२)$ , ह्यास्तव  $अ \pm \sqrt{ब}$  अथवा  $\sqrt{अ} \pm \sqrt{ब}$  असल्या रूपाचे करणीस त्यासारख्याच  $अ \mp \sqrt{ब}$  अथवा  $\sqrt{अ} \mp \sqrt{ब}$  ह्या रूपाच्या करणीनें गुणलें असतां तिला

अखंड रूपांत आणतां येईल . ज्या वेळेस बेरीज दिली  
असेल त्या वेळेस वरचें चिन्ह धरावें, आणि ज्या वेळेस  
वजाबाकी दिली असेल त्या वेळेस खालचें चिन्ह धरावें,

७. ह्यांत असें सिद्ध करूं.

$$\frac{1}{\sqrt{2} + \sqrt{3} - \sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6} + 3\sqrt{2} + 2\sqrt{3}}{92}.$$

ह्यांच्या दोन्ही पदांस  $\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{6}$  ह्यांनीं गुण,

$$\frac{1}{\sqrt{2} + \sqrt{3} - \sqrt{6}} \times \frac{\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{6}}{\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{6}} = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{6}}{2\sqrt{6}};$$

दोन्ही पदांस  $\sqrt{6}$  ह्यांनीं गुणल्यानें,

$$\frac{\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{6}}{2\sqrt{6}} = \frac{2\sqrt{3} + 3\sqrt{2} + \sqrt{6}}{92}.$$

८.  $\overset{+}{a} + \overset{+}{a}\overset{+}{b} + \overset{-}{a}\overset{-}{b} + \overset{+}{b}$  ह्यांस  $\overset{+}{a}$   
 $-\overset{+}{b}$  ह्यांनीं गुण.

$$\begin{array}{r} \overset{+}{a} + \overset{+}{a}\overset{+}{b} + \overset{-}{a}\overset{-}{b} + \overset{+}{b} \\ \overset{+}{a} - \overset{+}{b} \\ \hline \overset{+}{a} + \overset{+}{a}\overset{+}{b} + \overset{-}{a}\overset{-}{b} + \overset{+}{a}\overset{-}{b} + \overset{+}{a}\overset{+}{b} \\ - \overset{+}{a}\overset{+}{b} - \overset{+}{a}\overset{-}{b} - \overset{-}{a}\overset{+}{b} - \overset{+}{b} \\ \hline \overset{+}{a} \quad * \quad * \quad * \quad - \overset{+}{b} \end{array}$$

९. ह्रांत असें दाखीव कीं,

$$\sqrt{\left\{9 + \frac{99\alpha}{8} - (9 + \alpha)\sqrt{3\alpha} + \alpha^3\right\}} = 9 - \frac{13}{2}\sqrt{\alpha} + \alpha.$$

$$9 + \frac{99\alpha}{8} - \sqrt{3}\alpha^{\frac{3}{2}} - \sqrt{3}\alpha^{\frac{3}{2}} + \alpha^3 (9 - \frac{\sqrt{3}}{2}\alpha^{\frac{3}{2}} + \alpha)$$

$$\frac{9 - \frac{\sqrt{3}}{2}\alpha^{\frac{3}{2}}}{2 - \sqrt{3}\alpha^{\frac{3}{2}} + \alpha} - \sqrt{3}\alpha^{\frac{3}{2}} + \frac{99\alpha}{8}$$

$$\frac{-\sqrt{3}\alpha^{\frac{3}{2}} + \frac{99\alpha}{8}}{2 - \sqrt{3}\alpha^{\frac{3}{2}} + \alpha} \times \frac{2\alpha - \sqrt{3}\alpha^{\frac{3}{2}} + \alpha^3}{2\alpha - \sqrt{3}\alpha^{\frac{3}{2}} + \alpha^3}$$

\* \* \*

१०. असें दाखीव की  $\sqrt{12} + \sqrt{10} - \sqrt{3} + \sqrt{8} = 4\sqrt{3}$ .

११. ....  $3\sqrt{80} - 3\sqrt{320} + 4\sqrt{120} = 2\sqrt{48}$ .

१२. ....  $3\sqrt{6} - 6\sqrt{\frac{3}{2}} + 2\sqrt{48} - 4\sqrt{\frac{3}{2}} = 4\sqrt{3}$ .

१३. ....  $2\sqrt{\frac{\alpha}{2}} - 6\sqrt{\frac{\alpha}{2}} = \sqrt{2\alpha} - \sqrt{2\alpha}$ .

१४. ....  $6\sqrt{\alpha^3} - (4\alpha)^{\frac{3}{2}} - 2\alpha^{\frac{3}{2}} + \sqrt{16\alpha^3} =$   
 $2\alpha^{\frac{3}{2}} (4\alpha + 1)$

१५. ....  $2\sqrt{288} + 6\sqrt{48} + \sqrt{128} = 9\sqrt{32}$

१६. ....  $\sqrt{16\alpha^2\beta^3} + \sqrt{9\alpha^2\beta^3} =$

$5\alpha^2\beta + 9\alpha^2\beta) \sqrt{2\alpha\beta}$

१७. ....  $3\sqrt{8} \times 12\sqrt{6} \times 3\sqrt{2} = 12\sqrt{96}$

$$૧૮ \dots (\sqrt{૫}+૧)(૧-\sqrt{૫}) = -૪.$$

$$૧૯. \dots (\sqrt{૩}+\sqrt{૨})(\sqrt{૩}-\sqrt{૨}) = ૧.$$

$$૨૦ \dots \frac{\sqrt{અ}+\sqrt{બ}}{\sqrt{અ}-\sqrt{બ}} = \frac{અ+૨\sqrt{અબ}+બ}{અ-બ}.$$

$$૨૧ \dots \sqrt[૬]{\frac{૧}{ક્ષ^૩ય^૬}} \times \sqrt[૩]{ક્ષ^૩} \times \sqrt[૩]{ય} = \frac{૧}{ક્ષ^૩}.$$

$$૨૨ \dots \frac{\sqrt{૩}-\sqrt{૨}}{\sqrt{૨}+૧} = \sqrt{૨}-\sqrt{૩}+\sqrt{૬}-૨.$$

$$૨૩ \dots (\sqrt{૩}+\sqrt{૨})^૩ = ૯\sqrt{૩}+૧૧\sqrt{૨}.$$

$$૨૪. \dots \frac{૧}{ક્ષ-\sqrt{ક્ષ^૩-૧}} + \frac{૧}{ક્ષ+\sqrt{ક્ષ^૩-૧}} = ૨ક્ષ.$$

$$૨૫. \dots \frac{\sqrt{ક્ષ+ય}+\sqrt{ક્ષ-ય}}{\sqrt{ક્ષ+ગ}-\sqrt{ક્ષ-ગ}} = \frac{ક્ષ}{ય} + \frac{\sqrt{ક્ષ^૩-ય^૩}}{ય}.$$

$$૨૬. \dots \frac{\sqrt{અ^૩-ક્ષ^૩}}{૨} + \frac{ક્ષ}{૨} = \sqrt{\left(\frac{ક્ષ}{૨}\sqrt{અ^૩-ક્ષ^૩} + \frac{અ^૩}{૪}\right)}$$

$$૨૭ \dots \left\{ \frac{\sqrt{ક્ષ+\sqrt{ક્ષ^૩-અ}}}{\sqrt{૨}} + \frac{\sqrt{ક્ષ-\sqrt{ક્ષ^૩-અ}}}{\sqrt{૨}} \right\}^૨$$

$$= ૬+૧અ.$$

## प्रकरण ५ .

### एकवर्णसमीकरणे .

१.  $\sqrt{x+16} = 2 + \sqrt{x}$  हांत क्षची किंमत काढ .

समीकरणाचे प्रत्येक बाजूचा वर्ग केल्याने ,

$$x+16 = 4 + 4\sqrt{x} + x,$$

$$16 - 4 = 4\sqrt{x},$$

$$12 = 4\sqrt{x},$$

$$3 = \sqrt{x}, \therefore 9 = x.$$

२.  $\frac{x-y}{\sqrt{x}+\sqrt{y}} = \frac{\sqrt{x}-\sqrt{y}}{3} + 2\sqrt{y}$ , हांत क्षची

किंमत काढ .

समीकरणाचे डावे बाजूस संक्षेप केल्याने ,

$$\frac{x-y}{\sqrt{x}+\sqrt{y}} = \frac{(\sqrt{x}+\sqrt{y})(\sqrt{x}-\sqrt{y})}{\sqrt{x}+\sqrt{y}} = \sqrt{x}-\sqrt{y};$$

$$\therefore \sqrt{x}-\sqrt{y} = \frac{\sqrt{x}-\sqrt{y}}{3} + 2\sqrt{y},$$

$$3(\sqrt{x}-\sqrt{y}) = (\sqrt{x}-\sqrt{y}) + 6\sqrt{y},$$

$$2(\sqrt{x}-\sqrt{y}) = 6\sqrt{y}; \sqrt{x}-\sqrt{y} = 3\sqrt{y},$$

$$\sqrt{x} = 4\sqrt{y}, \therefore x = 16y.$$

$$३. \frac{क्ष}{\sqrt{अ^२+क्ष^२}} = \frac{क-क्ष}{\{ब^२+(क-क्ष)^२\}^{\frac{१}{२}}}$$

दोनही बाजूंचे वर्ग केल्याने,

$$\frac{क्ष^२}{अ^२+क्ष^२} = \frac{(क-क्ष)^२}{ब^२+(क-क्ष)^२} ;$$

छेदांचे गुणाकाराने गुणिल्याने,

$$ब^२क्ष^२+(क-क्ष)^२क्ष^२=अ^२(क-क्ष)^२+क्ष^२(क-क्ष)^२$$

$$ब^२क्ष^२=अ^२(क-क्ष)^२; बक्ष=अ(क-क्ष) = अक-अक्ष;$$

$$अक्ष+बक्ष=अक, (अ+ब)क्ष=अक, \therefore क्ष=\frac{अक}{अ+ब}.$$

$$४. १-\sqrt{१-क्ष} = न(१+\sqrt{१-क्ष}).$$

$$१-\sqrt{१-क्ष}=न+न\sqrt{१-क्ष},$$

$$१-न = न\sqrt{१-क्ष} + \sqrt{१-क्ष} = (न+१)\sqrt{१-क्ष},$$

$$१-२न+न^२ = (न^२+२न+१)(१-क्ष),$$

$$= न^२+२न+१-क्ष(न+१)^२,$$

$$क्ष(न+१)^२ = ४न,$$

$$\therefore क्ष = \frac{४न}{(न+१)^२}.$$

$$५. क्ष-४ = \frac{क्ष^२}{(१+\sqrt{१+क्ष})^२}, \text{ यांत क्षची किंमत काढ.}$$

$$\sqrt{x-8} = \frac{x}{\sqrt{9+x}+9} = \frac{x(\sqrt{9+x}-9)}{(\sqrt{9+x}+9)(\sqrt{9+x}-9)} = \frac{x(\sqrt{9+x}-9)}{(9+x-9)}$$

$$= \frac{x(\sqrt{9+x}-9)}{x} = \sqrt{9+x}-9;$$

$$\therefore x-8 = 9+x-2\sqrt{9+x}+9,$$

$$2\sqrt{9+x} = 17, \sqrt{9+x} = \frac{17}{2},$$

$$9+x = \frac{289}{4}, \therefore x = \frac{289}{4} - 9.$$

$$8. \quad 6\sqrt{3x^2} + \frac{243 + 324\sqrt{3x^2}}{96x^2-3} = 96x^2+3.$$

$$96x^2 - 6\sqrt{3x^2} + 3 = \frac{69(3 + 4\sqrt{3x^2})}{96x^2-3}$$

$$= \frac{69\sqrt{3}(\sqrt{3} + 4\sqrt{x^2})}{(4\sqrt{x^2} + \sqrt{3})(4\sqrt{x^2} - \sqrt{3})},$$

$$(4\sqrt{x^2} - \sqrt{3})^2 = \frac{69\sqrt{3}}{4\sqrt{x^2} - \sqrt{3}}, (4\sqrt{x^2} - \sqrt{3})^2 = 3 \cdot 3^2 = 3^3,$$

$$4\sqrt{x^2} - \sqrt{3} = 3^{\frac{3}{2}}, 4\sqrt{x^2} = 3^{\frac{3}{2}} + 3^{\frac{1}{2}},$$

$$96x^2 = 3^2 + 3^2 \cdot 2 + 3 = 27 + 54 + 3 = 84, \therefore x^2 = 3.$$

$$9. \quad \sqrt{a+x} + \sqrt{a-x} = \sqrt{b}, \text{ यांन } \sqrt{a-x} \text{ किंमत काढ.}$$

$$(a+x)^{\frac{3}{2}} + (a-x)^{\frac{3}{2}} = b^{\frac{3}{2}}, \text{ दोन ही बाजूंचे घन के ल्यानें,}$$

$$a+x+a-x+3\{(a+x)^{\frac{1}{2}} + (a-x)^{\frac{1}{2}}\}$$

$$\times (a+x)^{\frac{1}{2}}(a-x)^{\frac{1}{2}} = b^{\frac{3}{2}},$$

$$\begin{aligned} 3\{(a+s)^2 + (a-s)^2\}(a+s)^2(a-s)^2 &= b-2a, \\ 3b^2(a+s)^2(a-s)^2 &= b-2a, \therefore (a+s)^2 + (a-s)^2 = \frac{b-2a}{b^2}, \\ 4(a+s)(a-s) &= \frac{b-2a}{3b^2}, (a+s)(a-s) = \frac{(b-2a)^2}{36b^2}, \end{aligned}$$

$$a^2 - s^2 = \frac{(b-2a)^2}{36b^2}, s^2 = a^2 - \frac{(b-2a)^2}{36b^2},$$

$$\therefore s = \sqrt{a^2 - \frac{(b-2a)^2}{36b^2}}.$$

८.  $s\sqrt{s^2-9} + \sqrt{s^2-9} = s^2$ , यांत क्षत्री किंमत काढ.

$$\sqrt{s^2-9} = s^2 - s\sqrt{s^2-9}; \sqrt{s^2-9} = s^2 - 2s\sqrt{s^2-9} + s^2 - s^2;$$

$$s^2 + \sqrt{s^2-9} = 2s^2 - 2s\sqrt{s^2-9} = 2s^2(s^2 - \sqrt{s^2-9});$$

दोन्ही बाजूंस  $(s^2 + \sqrt{s^2-9})$  यांनी गुणिल्याने,

$$(s^2 + \sqrt{s^2-9})^2 = 2s^2(s^2 - \sqrt{s^2-9}) = 2s^4;$$

$$s^2 + \sqrt{s^2-9} = s^2\sqrt{2}, \sqrt{s^2-9} = s^2(\sqrt{2}-1);$$

$$s^2-9 = s^2(2-2\sqrt{2}) = 2s^2-2s^2\sqrt{2},$$

$$(2\sqrt{2}-2)s^2 = 9, s^2 = \frac{9}{2\sqrt{2}-2};$$

या अपूर्णाकाच्या दोन्ही पदांस  $\sqrt{2}+1$  यांनी गुणिल्याने,

$$s^2 = \frac{\sqrt{2}+1}{2}, \therefore s = \sqrt{\frac{\sqrt{2}+1}{2}}.$$



$$९. \frac{अ+क्ष}{\sqrt{अ}+\sqrt{अ+क्ष}} + \frac{अ-क्ष}{\sqrt{अ}+\sqrt{अ-क्ष}} = \sqrt{अ}.$$

$$\frac{(अ+क्ष)(\sqrt{अ}-\sqrt{अ+क्ष})}{अ-अ+क्ष} + \frac{(अ-क्ष)(\sqrt{अ}-\sqrt{अ-क्ष})}{अ-अ-क्ष} = \sqrt{अ},$$

$$\frac{(अ+क्ष)(\sqrt{अ}-\sqrt{अ+क्ष})}{-क्ष} + \frac{(अ-क्ष)(\sqrt{अ}-\sqrt{अ-क्ष})}{क्ष} = \sqrt{अ},$$

$$(अ-क्ष)(\sqrt{अ}-\sqrt{अ-क्ष}) - (अ+क्ष)(\sqrt{अ}-\sqrt{अ+क्ष}) = \sqrt{अ} \cdot क्ष,$$

$$अ\sqrt{अ} - \sqrt{अ} \cdot क्ष - (अ-क्ष)^{\frac{3}{2}} - अ\sqrt{अ} - \sqrt{अ} \cdot क्ष + (अ+क्ष)^{\frac{3}{2}} = \sqrt{अ} \cdot क्ष,$$

$$(अ+क्ष)^{\frac{3}{2}} - (अ-क्ष)^{\frac{3}{2}} = ३ \sqrt{अ} \cdot क्ष,$$

$$(अ+क्ष)^3 + (अ-क्ष)^3 - २(अ^3 - क्ष^3)^{\frac{3}{2}} = ९अक्ष^3,$$

$$२अ^3 + ६अक्ष^3 - ९अक्ष^3 = २(अ^3 - क्ष^3)^{\frac{3}{2}},$$

$$२अ^3 - ३अक्ष^3 = २(अ^3 - क्ष^3)^{\frac{3}{2}};$$

$$४अ^3 - १२अक्ष^3 + ९अक्ष^3 = ४(अ^3 - क्ष^3)^3,$$

$$= ४अ^3 - १२अक्ष^3 + १२अक्ष^3 - ४क्ष^3,$$

$$४क्ष^3 = ३क्ष^3अ, ४क्ष^3 = ३अ^3,$$

$$२क्ष = अ\sqrt{क्ष}, \therefore क्ष = \frac{अ}{२} \sqrt{क्ष}.$$

(१९). ज्या समीकरणांत क्ष आणि य अशीं दोन अव्यक्त पदे आहेत तीं समीकरणें सोडवावयाचीं असल्यास

खालच्या तीन रीतींतून एकादी रीति घ्यावी.

१. दोन अव्यक्त पदांपैकीं एक अव्यक्त पद उडीव , आणि जें समीकरण निघेल , त्या पासून दुसऱ्या अव्यक्तपदाची किंमत काढ .

२. कोणत्याही एका अव्यक्तपदाची किंमत प्रत्येक समीकरणांतून काढ . आणि दोन किंमतीवरावर मांड .

३. एका अव्यक्तपदाची किंमत कोणत्याही एका समीकरणांतून काढ , आणि ती दुसऱ्या समीकरणांत मांड .

$$\begin{array}{l} ११५ + ३५ = ७४ \\ १. \quad ३१५ + २५ = ४६ \end{array} \left\{ \begin{array}{l} \text{ह्यांत १५ आणि ५ त्यांच्या किंमती} \\ \text{पाहिल्या रीतीनें काढ .} \end{array} \right.$$

पाहिल्या समीकरणास दुसऱ्यांतील ५ चा जो वेळा-प्रकाशक २ आहे , त्यानें गुण , आणि दुसऱ्या समीकरणास , पाहिल्यांतील ५ चा जो वेळाप्रकाशक ३ आहे , त्यानें गुण .

$$१०१५ + ६५ = १४८,$$

$$११५ + ६५ = १८०.$$

आतां प्रत्येक समीकरणांत ५ चा वेळाप्रकाशक एकच आहे व विनं ही सरूप आहेत , म्हणून खालचें समीकरण वरल्या समीकरणांत जर वजा केलें , तर ५

+ जी अव्यक्तपदें उडवायाचीं आहेत त्यांचीं विनं सरूपनमतीक , तेव्हां त्या दोन समीकरणांची बेरीज घ्यावी .

उडून जाईल, आणि

$$\text{क्ष} = १० ; \therefore ३\text{क्ष} = ३०$$

आणि, दुसरे समीकरणांत ३क्षचे जागी ३० लिहिल्यानें,

$$३० + २य = ४६, २य = १६, \therefore य = ८.$$

जेव्हां तीन अथवा त्यांहून अधिक समीकरणे दिली आहेत, तेव्हां त्यांतील दोन दोन समीकरणांची एक एक जोडी घेऊन प्रत्येक जोडींतून तेंच अव्यक्त पद उडवावें.

$$\begin{array}{l} २. \quad \text{क्ष}^{\text{म}} \text{य}^{\text{न}} = \text{अ} \quad \cdot (१) \\ \quad \text{क्ष}^{\text{प}} \text{य}^{\text{क}} = \text{ब} \quad \cdot (२) \end{array} \left\{ \begin{array}{l} \text{ह्यांत क्ष आणि य ह्यांच्या} \\ \text{किंमती दुसरे रीतीनें काढ.} \end{array} \right.$$

$$(१) \text{ ह्यापासून } \text{क्ष}^{\text{म}} = \frac{\text{अ}}{\text{य}^{\frac{\text{न}}{\text{म}}}}, \therefore \text{क्ष} = \frac{\text{अ}^{\frac{१}{\text{म}}}}{\text{य}^{\frac{\text{न}}{\text{म}}}};$$

$$(२) \dots\dots\dots \text{क्ष}^{\text{प}} = \frac{\text{ब}}{\text{य}^{\frac{\text{क}}{\text{प}}}}, \therefore \text{क्ष} = \frac{\text{ब}^{\frac{१}{\text{प}}}}{\text{य}^{\frac{\text{क}}{\text{प}}}},$$

ह्या दोन्ही किंमती क्ष ह्याच पदाच्या आहेत, म्हणून त्या परस्पर बरोबर आहेत, ह्यास्तव त्यांचें समीकरण मांडल्यास चालेल ; म्हणजे,

$$\frac{\text{अ}^{\frac{१}{\text{म}}}}{\text{य}^{\frac{\text{न}}{\text{म}}}} = \frac{\text{ब}^{\frac{१}{\text{प}}}}{\text{य}^{\frac{\text{क}}{\text{प}}}}, \therefore \frac{\text{य}^{\frac{\text{क}}{\text{प}}}}{\text{य}^{\frac{\text{न}}{\text{म}}}} = \frac{\text{ब}^{\frac{१}{\text{प}}}}{\text{अ}^{\frac{१}{\text{म}}}},$$

$$\text{अथवा, य } \frac{\frac{क}{प} - \frac{न}{प}}{अ} = \frac{\frac{ब}{प}}{\frac{अ}{प}},$$

$$\text{अथवा, य } \frac{\frac{कम-नप}{पम}}{अ} = \frac{\frac{ब}{प}}{\frac{अ}{प}},$$

$$\therefore \text{य} = \left( \frac{\frac{ब}{प}}{\frac{अ}{प}} \right) \frac{पम}{कम-नप} = \left( \frac{ब}{अ} \right) \frac{प}{कम-नप}.$$

ह्याप्रमाणेच दोन्ही समीकरणांतून यच्या दोन किंमती काढून त्यांचे समीकरण केल्याने,

$$क्ष = \left( \frac{\frac{अ}{न}}{\frac{ब}{न}} \right) \frac{१}{कम-नप}.$$

$$\begin{aligned} \frac{य}{क्ष} + \frac{३क्ष}{क्ष+य} &= \frac{क्ष^३-य^३}{य} \dots (१) \\ \frac{क्ष}{य} &= \frac{क्ष+य}{क्ष} + \frac{य}{क्ष} \dots (२) \end{aligned} \left\{ \begin{array}{l} \text{ह्यांत क्ष आणि य} \\ \text{ह्यांच्या किंमती निस} \\ \text{या शीतीने काढ.} \end{array} \right.$$

$$(२) \frac{क्ष}{य} - \frac{य}{क्ष} = \frac{क्ष+य}{क्ष}, \frac{क्ष^३-य^३}{क्षय} = \frac{क्ष+य}{क्ष};$$

आणि दोन्ही बाजूंस  $\frac{क्ष+य}{क्ष}$  ह्याने भागल्याने,

$$\frac{क्ष-य}{य} = १, \therefore क्ष-य = य;$$

$$\left. \begin{array}{l} क्ष = २य \\ क्ष^३ = ८य^३ \end{array} \right\} \text{ह्या किंमती (१) ह्यांत ठेवल्याने,}$$

$$\frac{य}{२य} + \frac{६य}{२य+य} = \frac{४य-य}{य}, \frac{१}{२} + \frac{६}{२+१} = ४य-य, \frac{१}{२} + \frac{६}{३} = ३य,$$

$$३+१२ = १०य, \text{ अथवा, } १०य = १५,$$

$$\therefore य = \frac{१५}{१०} = \frac{३}{२}, \text{ आणि क्ष} = २य = \frac{३}{१}.$$

$$४. \frac{क्षय}{क्ष+य} = ७०, \frac{क्षज्ञ}{क्ष+ज्ञ} = ८४, \frac{यज्ञ}{य+ज्ञ} = १४०;$$

त्यांत क्ष, य, आणि ज्ञ ह्यांच्या किंमती काढ.

पहिल्या समीकरणांतील प्रत्येक वाजूचा व्युत्क्रम घेतल्याने,

$$\frac{क्ष+य}{क्षय} = \frac{१}{७०}, \text{ अथवा } \frac{क्ष}{क्षय} + \frac{य}{क्षय} = \frac{१}{७०};$$

$$\therefore \left. \begin{aligned} \frac{१}{क्ष} + \frac{१}{य} &= \frac{१}{७०}, \dots (१) \\ \frac{१}{क्ष} + \frac{१}{ज्ञ} &= \frac{१}{८४}, \dots (२) \\ \frac{१}{य} + \frac{१}{ज्ञ} &= \frac{१}{१४०}, \dots (३) \end{aligned} \right\} \begin{aligned} &\text{आणि ह्याप्रमाणेच दु-} \\ &\text{सऱ्या आणि तिसऱ्या स-} \\ &\text{मीकरणांपासून,} \end{aligned}$$

$$(१) \frac{१}{क्ष} + \frac{१}{य} = \frac{३}{१४०}, \text{ ह्यांतून (३) वजा केल्याने,}$$

$$\frac{१}{क्ष} - \frac{१}{ज्ञ} = \frac{१}{१४०} = \frac{३}{४२०},$$

\*. एकाम कोणत्याही पदानें भागलें म्हणजे तो भागाकार त्या प-  
राचा व्युत्क्रम होतो. जसें, क्ष,  $\frac{क्ष}{क्ष}$ , आणि  $\frac{अ+ब}{क्ष}$ , ह्यांचे व्युत्क्रम अनु-  
क्रमे,  $\frac{१}{क्ष}$ ,  $\frac{क्ष}{क्ष}$ , आणि  $\frac{क्ष}{अ+ब}$ , हे आहेत.

$$(२) \frac{1}{क्ष} + \frac{1}{ज्ञ} = \frac{1}{८४} = \frac{५}{४२०}$$

$$\therefore \frac{२}{क्ष} = \frac{८}{४२०} = \frac{२}{१०५}, \therefore क्ष = १०५.$$

$$\text{आणि} \quad \frac{३}{ज्ञ} = \frac{३}{४२०}, \therefore ज्ञ = ४२०.$$

$$(३) \frac{1}{य} + \frac{1}{४२०} = \frac{1}{१४०}, \therefore \frac{1}{य} = \frac{३}{४२०} - \frac{1}{४२०} = \frac{२}{४२०} = \frac{१}{२१०},$$

$$\therefore य = २१०.$$

हीं पुढील एकवर्णसमीकरणें सोडीव.

$$१. \sqrt{क्ष+३} = \sqrt{७}, \quad \text{उत्तर. क्ष} = २.$$

$$२. \sqrt{क्ष-१६} = क्ष-२. \quad \text{उत्तर. क्ष} = ५.$$

$$३. \sqrt{क्ष-१} = \sqrt{क्ष-९}. \quad \text{उत्तर. क्ष} = २५.$$

$$४. \sqrt{क्ष} + \sqrt{क्ष-३} = ३. \quad \text{उत्तर. क्ष} = ४.$$

$$५. \sqrt{क्ष} - \sqrt{३} = \sqrt{क्ष-२}. \quad \text{उत्तर. क्ष} = २.$$

$$६. \sqrt{४क्ष+३} = ३. \quad \text{उत्तर. क्ष} = ६.$$

$$७. \sqrt{५क्ष+४} = \sqrt{३क्ष+२}. \quad \text{उत्तर. क्ष} = १२.$$

$$८. \sqrt{क्ष+अ} + क्ष = ब \quad \text{उत्तर. क्ष} = \frac{ब^२-अ}{२ब}.$$



$$૨૧. \frac{n a^2}{\sqrt{x^2 + a^2}} - ૧૩ = \sqrt{a^2 + x^2}. \text{ ઉત્તર. } x = \frac{(n-1)a}{(૨n-1)^{\frac{૨}{૩}}}.$$

$$૨૨. a x - \sqrt{x^2 + x + ૧} = \sqrt{x^2 - x + ૧}.$$

$$\text{ઉત્તર. } x = \frac{૩}{a} \sqrt{\frac{a^2 - ૧}{a^2 - ૪}}.$$

$$૨૩. \sqrt{a^2 + a x} = a - \sqrt{a^2 - a x}.$$

$$\text{ઉત્તર. } x = \frac{a}{૨} \sqrt{૩}.$$

$$૨૪. \frac{૧}{x} + \frac{૧}{a} = \sqrt{\frac{૧}{a^2} + \sqrt{\frac{૪}{a^2 x^2} + \frac{૧}{x^2}}}.$$

$$\text{ઉત્તર. } x = \frac{a b^2}{a^2 - b^2}.$$

$$૨૫. \frac{a x - ૧}{\sqrt{a x + ૧}} - ૪ = \frac{\sqrt{a x - ૧}}{૨}.$$

$$\text{ઉત્તર. } x = \frac{૮૧}{a}.$$

$$૨૬. \frac{૧}{૨} \sqrt{x^2 + ૩ a^2} + \frac{૧}{૨} \sqrt{x^2 - ૩ a^2} = x \sqrt{a}.$$

$$\text{ઉત્તર. } x = \sqrt[૪]{\frac{૧ a^3}{૪ - ૪ a}}.$$

$$૨૭. \frac{૧}{\sqrt{૧ - x} + ૧} + \frac{૧}{\sqrt{૧ + x} - ૧} = \frac{૧}{x}.$$

$$\text{ઉત્તર. } x = \sqrt[૪]{\frac{૧}{૨}}.$$



$$२८. \sqrt{१+६५} + \sqrt{१-६५} = \sqrt{२}. \quad \text{उत्तर } ६५ = १$$

$$२९. \frac{६५ + \sqrt{६५^2 - १}}{६५ - \sqrt{६५^2 - १}} + \frac{६५ - \sqrt{६५^2 - १}}{६५ + \sqrt{६५^2 - १}} = ४६५(६५ - १)$$

$$\text{उत्तर } ६५ = \frac{१}{२}$$

$$३०. \left. \begin{array}{l} ६५ + य = ९. \\ ६५ - य = १. \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{ह्यांत ६५ आणि य ह्या-} \\ \text{च्या किंमती काढ.} \end{array}$$

$$\text{उत्तर } \left\{ \begin{array}{l} ६५ = ३. \\ य = २. \end{array} \right.$$

$$३१. \left\{ \begin{array}{l} २६५ - य = १ \\ ६५ + ३य = ११ \end{array} \right\} \quad \text{उत्तर } \left\{ \begin{array}{l} ६५ = २. \\ य = ३. \end{array} \right.$$

$$३२. \left\{ \begin{array}{l} ४६५ - ११य = ९. \\ २६५ + ३य = १३. \end{array} \right\} \quad \text{उत्तर } \left\{ \begin{array}{l} ६५ = ९. \\ य = १. \end{array} \right.$$

$$३३. \left\{ \begin{array}{l} ३६५ + २य = २३. \\ ५य - २६५ = २९. \end{array} \right\} \quad \text{उत्तर } \left\{ \begin{array}{l} ६५ = ३. \\ य = ७. \end{array} \right.$$

$$३४. \left\{ \begin{array}{l} \frac{६५}{२} - य = १. \\ ६५ - \frac{य}{२} = ८. \end{array} \right\} \quad \text{उत्तर } \left\{ \begin{array}{l} ६५ = १०. \\ य = ४. \end{array} \right.$$

$$३५. \left\{ \begin{array}{l} \frac{६५}{३} + \frac{य}{६} - ५ = ०. \\ २६५ + \frac{य}{३} - १७ = ०. \end{array} \right\} \quad \text{उत्तर } \left\{ \begin{array}{l} ६५ = ६. \\ य = १९. \end{array} \right.$$

$$३६. \left. \begin{aligned} \frac{x+y}{१०} + \frac{x-y}{२} &= ०. \\ \frac{x+y}{५} + \frac{x-y}{२} &= १. \end{aligned} \right\} \text{उत्तर. } \begin{cases} x=४. \\ y=६. \end{cases}$$

$$३७. \left. \begin{aligned} \frac{२x-y}{४} - \frac{३}{२} &= \frac{३y}{४} - x - २. \\ \frac{x+y}{३} &= २\frac{२}{३}. \end{aligned} \right\} \text{उ. } \begin{cases} x=३. \\ y=९. \end{cases}$$

$$३८. \left. \begin{aligned} ax+by &= c. \\ \frac{x}{b} - \frac{y}{a} &= १. \end{aligned} \right\} \text{उत्तर. } \begin{cases} x = \frac{ab+c}{२a}. \\ y = \frac{-ab+c}{२b}. \end{cases}$$

$$३९. \left. \begin{aligned} \frac{x+२}{y} &= \frac{७}{८}. \\ \frac{x}{y-२} &= \frac{५}{६}. \end{aligned} \right\} \text{उत्तर. } \begin{cases} x=५. \\ y=८. \end{cases}$$

$$४०. \left. \begin{aligned} \frac{m}{x} + \frac{n}{y} &= a. \\ \frac{n}{x} + \frac{m}{y} &= b. \end{aligned} \right\} \text{उत्तर. } \begin{cases} x = \frac{m^2-n^2}{m^2a-n^2b}. \\ y = \frac{m^2-n^2}{m^2b-n^2a}. \end{cases}$$

$$४१. \left. \begin{aligned} (x+१)(y-९) &= (y+७)(x+५) - ११२. \\ ३y - २x &= ९. \end{aligned} \right\}$$

$$\text{उत्तर. } \begin{cases} x=३. \\ y=५. \end{cases}$$

$$82. \left. \begin{aligned} y + \frac{x}{4} &= 90 - \frac{y-2x-9}{2} \\ \frac{2x-9}{10} - \frac{6x-2y}{5} &= \frac{x-y}{10} \end{aligned} \right\} \text{उ०} \begin{cases} x=8. \\ y=1. \end{cases}$$

$$83. \left. \begin{aligned} 3.4x - 0.2y &= 0.9 \\ 2x + 0.8y &= 1.2 \end{aligned} \right\} \text{उत्तर} \begin{cases} x=0.2 \\ y=2.9 \end{cases}$$

$$84. \left. \begin{aligned} \frac{x+y}{3} &= k \\ ax - by &= k \end{aligned} \right\} \text{उत्तर} \begin{cases} x = \frac{(a+3b)k}{a^2+b^2} \\ y = \frac{(3a-1)k}{a^2+b^2} \end{cases}$$

$$85. \left. \begin{aligned} ax + by &= k \\ a(ax + by) &= b(b + y) \end{aligned} \right\} \text{उ०} \begin{cases} x = \frac{b^2 + k - a^2}{2a} \\ y = \frac{a^2 + k - b^2}{2b} \end{cases}$$

$$86. \left. \begin{aligned} 2x - 2y + 3z &= 96 \\ 3x + 9y - 2z &= 6 \\ 4x + 3y - 8z &= -9 \end{aligned} \right\} \text{उत्तर} \begin{cases} x=2 \\ y=1 \\ z=4 \end{cases}$$

$$87. \left. \begin{aligned} \frac{x}{2} + \frac{y}{3} + \frac{z}{4} &= 12 \\ \frac{x}{3} + \frac{y}{4} + \frac{z}{5} &= 10 \\ \frac{x}{4} + \frac{y}{5} + \frac{z}{6} &= 8 \end{aligned} \right\} \text{उत्तर} \begin{cases} x=24 \\ y=60 \\ z=120 \end{cases}$$

$$\begin{array}{l}
 ४८. \left. \begin{array}{l} \frac{क्ष+य}{ज्ञ} = ९. \\ \frac{य-ज्ञ}{क्ष} = १. \\ \frac{क्ष-ज्ञ}{य} = \frac{१}{३}. \end{array} \right\} \text{उत्तर.} \left\{ \begin{array}{l} क्ष = ४. \\ य = ६. \\ ज्ञ = २. \end{array} \right. \\
 \\
 ४९. \left. \begin{array}{l} क्षयज्ञ = ४०. \\ क्षयह = ८०. \\ यज्ञह = २००. \\ क्षज्ञह = १००. \end{array} \right\} \text{उत्तर.} \left\{ \begin{array}{l} क्ष = २. \\ य = ४. \\ ज्ञ = ९. \\ ह = १०. \end{array} \right.
 \end{array}$$

## प्रश्न.

१. अशी कोणती संख्या आहे की, जिचे दुपटीत ९ मिळविले असता, त्या बेरजेचे वर्गमूळ ५ होईल.

उत्तर. ८

२. अशी संख्या काढ की, जिचे पांचपटीत ४ मिळविले असता, त्या बेरजेचे वर्गमूळ त्याच संख्येच्या तिपटीचे वर्गमूळाहून दोन ह्यांनी अधिक होईल. उत्तर. १२.

३. अशी संख्या काढ, की जिचे वर्गातून ७ वजा करून जी बाकी राहील, तिचे वर्गमूळ वही संख्या ७ तांत वजा

करून जी बाकी राहिल ती हीं बरोबर होतील . उत्तर . ४ .

४ . अशा दोन संख्या काढ , कीं ज्यांची बेरीज ५६ होईल , आणि वजाबाकी २४ होईल . उत्तर ४० आणि १६ .

५ . अशा दोन संख्या काढ , कीं ज्यांची बेरीज १६ होईल , आणि ज्यांचे व्युत्क्रमानांची बेरीज त्याच व्युत्क्रमांचे वजाबाकीचे दुपटी बरोबर होईल .

उत्तर . ४ आणि १२ .

६ . समुद्रावरील एका लढाईत आरमाराचा  $\frac{१}{३}$  शत्रूने घेतला ,  $\frac{१}{६}$  समुद्रांत बुडिबला , आणि दोन जहाजे जाळलीं . लढाई झाल्यानंतर जीं जहाजे राहिलीं , त्यांचा  $\frac{१}{६}$  तुफानांत गमावला . आणि शेवटीं २४ जहाजे राहिलीं , तर प्रथमतः जहाजे किती होती ?

उत्तर ६० .

७ . दोन पुरुषांची वयें ३ : ४ ह्या प्रमाणांत आहेत , परंतु १० वर्षांपूर्वी त्यांची वयें २ : ३ ह्या प्रमाणांत होती ; तर त्यांची वयें काय आहेत ?

उत्तर . ३० आणि ४० .

८ . एका दारूबिष्याने ९ शिलिंग दराचे २० बोर आणि ११ शिलिंग दराचे १६ बोर एकत्र केले , आणि त्यास पुढें

असें वाटूं लागलें कीं, त्या मिश्रणांत १४ शिलिंग दराचे दारूचे कांहीं शेर मिळवावे, अशा रीतीनें कीं जेणेकरून त्या मिश्रणाचा दर १२ शिलिंग होईल ; तर त्यानें तिसरे प्रकारचे दारूचे किती शेर मिळवावे ?

उत्तर . ४८ शेर .

९. एका कुणव्यानें एका व्यापाऱ्यापासून २९ पोंडांस १२ मेंदरें आणि २० कोंकरें विकत घेतलीं, आणि दुसऱ्या एकापासून त्याच दरानें ३३ पोंड १० शिलिंग ह्यांस १० मेंदरें आणि ३० कोंकरें विकत घेतलीं ; तर एकेकाची किंमत काय होती ?

उत्तर . मेंदराची २५ शिलिंग, आणि कोंकराची १४ शि०

१. अ आणि ब ह्या दोन व्यापाऱ्यांनीं ८३३ पोंड भांडवल व्यापारांत घातलें ; कांहीं दिवसपर्यंत चांगला व्यापार करून, त्यांस निष्का नफा १५३ पोंड झाला, च त्यापैकीं बस अ पेक्षां ४५ पोंड जाजती मिळाले ; तर त्या भांडवलांत प्रत्येकाचा पैसा किती किती होता ?

उत्तर . अ २९४ पोंड, आणि ब ५३९ पोंड .

११ . जर एका शेतकऱ्यास दाहा दाहा मेंदरांस एंक्रक एकर जमीन नांगराची लागते, आणि चार चार मेंदरांस

एकेक एकर जमीन चारणीकरिता घ्यावी लागते; तर ह्याप्रमाणानें ज्या कुणव्याकडे ७०० एकर जमीन आहे तो किती मेंढरें पाळीत असेल ?

उत्तर. २०० मेंढरें.

१२. अशी कोणती संख्या आहे, कीं शीत १. ५ , आणि १३ हे अंक वेगळे वेगळे मिळविले, तर पहिली बेरीज जशी दुसरी बेरीजस, तशी दुसरी बेरीज तिसऱ्या बेरीजेस होईल.

उत्तर. १

१३. असा एक अपूर्णांक काढ, की ज्याचे अंशांत ज्याचा छेद मिळविला तर ती बेरीज अंशांचे पाचपटीबरोबर होईल, आणि ज्याचे अंशांत एक मिळविला तर ज्याची किंमत  $\frac{1}{2}$  होईल.

उत्तर.  $\frac{1}{2}$

१४. अ, क ठिकाणाहून ड ठिकाणाकडे जाण्यास निघाला आणि त्याचवेळेस ब, डहून ककडे यावा-यास निघाला; त्यांची वाटेनें गांठ पडल्यावर अ, ड येथें अ तासांत पोहोचला, आणि ब, क येथें ब तासांत पोहोचला; तर एकेकाला तें सगळें अंतर चालावयास किती तास लागले ?

उत्तर. अ, अ (अ + ब); आणि ब, ब (अ + ब).

१५. एके कलालाजबळ दोन प्रकारची दारू होती, एक  
२० आणे शेराच्या दराची होती, आणि दुसरी १२ आणे  
शेराच्या दराची होती. मग त्यानें दोन्ही मिळवून १४  
आणे शेराच्या दराचें एक शेर मिश्रण केलें, तर त्यानें त्यांत  
एकेक प्रकारची दारू किती किती मिळविली?

उत्तर. पहिलीचा  $\frac{1}{2}$  शेर; आणि दुसरीचे  $\frac{2}{3}$  शेर.

१६. दोन आंकड्यांची अशी एक संख्या काढ, कीं ज्या  
आंकड्यांचे बेरजेची पांच पट त्या संख्ये बरोबर होईल,  
आणि त्या संख्येंत ९ मिळविले असतां जी एकंदर बेरीज  
येईल तीं त्या आंकड्यांची व्युत्क्रमस्थिति होईल.

उत्तर. ४९.

१७. एका मनुष्यानें रेवळतां रेवळतां, आपल्या बरोबर  
जिनकें द्रव्य आणिलें होतें त्याचे दुप्पट जिकिलें, नंतर  
१६ शिलिंग गमाविलें, पुढें त्यानें रेवळ चालला असतां  
बाकी जा त्याजबळ पैसे राहिला होता त्याचे  $\frac{1}{2}$  गमा-  
विले, नंतर मूळचे द्रव्या इतकें द्रव्य जिकिलें, आणि नग  
तो आपलें द्रव्य सोपून पाहातो तो ८० शिलिंग भरलें,  
तर त्यानें किती द्रव्य घेऊन रेवळावयास प्रारंभ केला?

उत्तर. ५२ शिलिंग.



१८. कांहीं एक काम अ, अ दिवसांत करितो, आणि तेंच काम ब, ब दिवसांत करितो ; तर ते दोघे एकदम तें काम करूं लागले तर किती दिवसांत संपवितील ?

उत्तर.  $\frac{अ+ब}{अ \times ब}$  दिवस.

१९. एका व्यापाऱ्यानें तीन वर्षें पर्यंत दरसाल ५० पोंड खर्च करून आपला संसार केला, आणि जीजी बाकी राहात गेली तींत दरवर्षी तिचा  $\frac{१}{३}$  भरघालीत गेला. नंतर तिसऱ्या वर्षाचे अंती तो आपलें द्रव्य मोजून पाहातो ते तें मुळच्या भांडवलाने दुप्पट भरलें ; तर त्याचें मुळचे भांडवल किती होतें ?

उत्तर. ५४० पोंड.

२०. एक मनुष्य ऐनभरतीचे वेळेस एका तासाचे  $\frac{३}{४}$  शांत ५ मैल लांब होडी नेतो, व जेव्हां भरतीचा जोर  $\frac{३}{४}$  कमी होतो तेव्हां त्यास तितकेंच मैल परत यावयास  $१\frac{१}{२}$  तास लागतो ; तर जेव्हां भरतीचा वेग अत्यंत आहे तेव्हां पाणी एक तासांत किती लांब जातें ?

उत्तर. एकतासांत  $२\frac{३}{४}$  मैल.

२१. ११५२० ह्या संख्येचे असे तीन भाग कर, कीं पहिल्या आणि दुसऱ्या भागांच्या बेरजेची नऊपट, दुसऱ्या

आणि तिसऱ्या भागांच्या बेरजेच्या सातपटीबरोबर होईल; आणि पहिला भाग दुसरे भागांतून वजा करून जी बाकी राहील तिची आठपट, पहिल्या आणि तिसऱ्या भागांचे बेरजेबरोबर होईल.

उत्तर. २८८०, ३८४०, आणि ४८००.

२२. एका मनुष्याने ९४ पोंडांस कांहीं मेंदरे विकत घेतलीं, पुढें त्यांपैकीं १७ देऊन टाकून बाकीच्या मेंदरांचा  $\frac{1}{4}$  पहिल्या दराप्रमाणेंच २० पोंडास विकला; तर त्यानें मुळीं किती मेंदरे घेतलीं होतीं ?

उत्तर. ४७ मेंदरे.

२३. एका शेतकऱ्यानें कांहीं खंडी गहूं व कांहीं खंडी हरबरे साऱ्याबद्दल देण्याचा करार करून जमीनदारापासून एक शेत घेतलें; जेव्हां गहूं ५५ रुपये खंडी होते व हरबरे ३३ रुपये खंडी होते, तेव्हां जमीनदारास गहूंचा आणि हरबऱ्यांचा सारखाचेंचेंसा पोहोंचला; परंतु जेव्हां गहूं ६५ रुपये खंडी आणि हरबरे ४१ रुपये खंडी झाले, तेव्हां जमीनदारास १४० रुपये जास्त मिळूं लागले; तर किती खंडी गहूं व किती खंडी हरबरे देण्याचा त्याचा करार होता ?

उत्तर . ६ खंडी गहूं, आणि १० खंडी हरबरे  
 २४ . एका गाडीच्या पुढल्या चाकाचा परीघ अ  
 फूट आहे आणि मागल्या चाकाचा ब फूट आहे; आतां  
 मागल्या चाकाच्या पेशां पुढल्या चाकाच्या न प्रदक्षि  
 णा जाजती झाल्या आहेत, तर पुढलें चाक आणि मा-  
 गलें चाक ह्यांचेमधील अंतर हिशोबांत न घेतां ती गा-  
 डी किती लांब गेली असावी ?

उत्तर .  $\frac{\text{अबन}}{\text{ब-अ}}$  फूट .

## प्रकरण ४ .

### वर्गसमीकरणें .

(१६). ज्या समीकरणांत अव्यक्तपदाचा दुसरा  
 घात म्हणजे वर्ग असतो त्यास वर्गसमीकरण म्ह-  
 णतात . ज्या समीकरणांत अव्यक्तपदाचा वर्ग मात्र  
 असतो त्यास एकाकी वर्गसमीकरण म्हणतात ;  
 परंतु ज्या समीकरणांत अव्यक्तपदाचा वर्ग आणि प्र-  
 थम घात हे असतात त्यास संयुक्त वर्गसमीकरण  
 म्हणतात . जसें,  $x^2=४$ , आणि  $अय^२-अ=ब$  ,

हीं एकाकी वर्गसमीकरणें आहेत; आणि  $क्ष + २ क्ष = ८$ ,  
आणि  $य^३ - अय = स$ , हीं संयुक्तवर्गसमीकरणें आहेत.

उदाहरण १.  $७ क्ष^३ + १८ = ४ क्ष^३ + ४९०$  ह्या एकाकी  
वर्गसमीकरणांतील  $क्ष$  अव्यक्तपदाची किंमत काढ.

स्थळांतरानें,  $७ क्ष^३ - ४ क्ष^३ = ४९० - १८$ ,

म्हणजे  $३ क्ष^३ = ४७२$ ,

$\therefore क्ष^३ = \frac{४७२}{३} = १५४$ .

आणि प्रत्येक बाजूचें वर्गमूळ काढल्यानें,

$क्ष = \pm १२$ .

$\therefore + १२ \times + १२ = १४४$ , आणि  $- १२ \times - १२ = १४४$ .

$\therefore क्ष$  च्या किंमतीस  $\pm$  चिन्ह लावले आहे.

हीं पुढील एकाकी वर्गसमीकरणें सोडीव.

१.  $क्ष^३ = १४४$ . उत्तर.  $क्ष = \pm १२$ .

२.  $क्ष^३ - ९ = १६$ . उत्तर.  $क्ष = \pm ९$ .

३.  $\frac{३ क्ष^३}{४} - ९ = ७$ . उत्तर.  $क्ष = \pm ४$ .

४.  $२\sqrt{१ - क्ष^३} = १५$ . उत्तर.  $क्ष = \pm \frac{१}{२}$ .

५.  $\frac{\sqrt{अ^३ + क्ष^३} - क्ष}{क्ष} = \frac{१}{ब}$  उत्तर.  $क्ष = \pm \frac{अब}{\sqrt{२ब + १}}$ .

$$६. \frac{७क्ष^३}{४} - \frac{४क्ष^३+५}{२} + \frac{२क्ष^३-१५}{४} = ०.$$

उत्तर. क्ष =  $\pm ५$ .

$$७. \frac{१}{२क्ष^२} + ७ = \frac{९}{४क्ष^२}. \quad \text{उत्तर. क्ष} = \pm \frac{१}{३}$$

$$८. २५ - \frac{क्ष^३+५०}{५} = क्ष^२ - \frac{क्ष^३-१०}{२}.$$

उत्तर. क्ष =  $\pm ५$ .

### संयुक्तवर्गसमीकरणे.

(१७). कोणत्याही संयुक्तसमीकरणाम क्ष + पक्ष = क, असें रूप देतां येईल. त्यांत प आणि क हीं अक्षरे व्यक्त पदे किंवा संख्यादाखवितात. आणि त्या समीकरणाच्या प्रत्येक बाजूंत  $\left[\frac{प}{२}\right]^२$  हें पद मिळविलें तर,

$$क्ष + पक्ष + \left[\frac{प}{२}\right]^२ = क + \left[\frac{प}{२}\right]^२;$$

प्रत्येक बाजूचें वर्गमूळ काढल्यानें,

$$क्ष + \frac{प}{२} = \pm \sqrt{\frac{प^२}{४} + क}; \therefore क्ष = -\frac{प}{२} \pm \sqrt{\frac{प^२}{४} + क}.$$

ह्या वस्तुतः संयुक्तवर्गसमीकरणे सोडविण्याचा हा नियम सिद्ध होतो, कीं दुसऱ्या पदाच्या वेळाप्रकाशकाच्या अर्द्याचा वर्ग करून तो प्रत्येक बाजूंत मिळवावा, आणि मग प्रत्येक बाजूचें वर्गमूळ काढावें.

## उदाहरणें .

१.  $x^2 + ८x = २०$  , वर्ग पुरा कर .

$x^2 + ८x + ४^2 = २० + १६ = ३६$ , वर्गमूळ काढ .

$$x + ४ = \pm ६ ,$$

$\therefore x = \pm ६ - ४ = +६ - ४$ , किंवा  $-६ - ४ = २$ , किंवा  $-१०$  .

२.  $x^2 - ५x = ६$  , वर्ग पुरा कर .

$x^2 - ५x + \left(\frac{५}{२}\right)^2 = ६ + \frac{२५}{४} = \frac{२४}{४} + \frac{२५}{४} = \frac{४९}{४}$ , वर्गमूळ काढ ,

$$x - \frac{५}{२} = \pm \frac{७}{२} ,$$

$\therefore x = \frac{५ \pm ७}{२} = \frac{१२}{२}$ , किंवा  $-\frac{२}{२} = ६$ , किंवा  $-१$  .

ह्या उदाहरणांवरून असें दिसते, कीं पहिल्या बाजूचें वर्गमूळ काढण्याची सुलभ रीति म्हणजे हीच आहे कीं पहिल्या पदाचें आणि तिसऱ्या पदाचें वर्गमूळ काढावें, आणि त्या दोन्ही वर्गमूळांच्या मध्ये दुसऱ्या पदाचें चिन्ह मांडावें .

ह्यावरूनच हें ही दिसते, कीं वर्गसमीकरणांत अव्यक्त पदास दोन मूळें म्हणजे दोन किंमती असतात .

$x^2 + px - k = ०$ , ह्या समीकरणाचीं दोन मूळें

दाखविण्यास  $a$  आणि  $b$  हीं अक्षरें घेतलीं, तर

$$a = -\frac{p}{२} + \sqrt{\frac{p^2}{४} + k}, \quad b = -\frac{p}{२} - \sqrt{\frac{p^2}{४} + k} .$$

$$\therefore \text{अ} + \text{ब} = -\text{प}, \text{अब} = -\frac{\text{प}^2}{४} - \left(\frac{\text{प}^2}{४} + \text{क}\right);$$

ह्यावरून असें सिद्ध होतें, कीं दोन्ही मुळांची बेरीज दुसऱ्या पदाच्या वेळाप्रकाशकाचें चिन्ह बदलून जो वेळाप्रकाशक, त्या बरोबर असते, आणि मुळाचा गुणाकार शेवटल्या पदाबरोबर असतो हे सिद्धांत सर्वप्रकारच्या घाताच्या समीकरणास लागू आहेत.

जेव्हा  $\sqrt{\frac{\text{प}^2}{४}} + \text{ब} = ०$ , तेव्हा मात्र वरली मुळे एकमेकाबरोबर असतात कारण, तस झाल्याने  
 $\text{अ} = -\frac{\text{प}}{२}$  आणि  $\text{ब} = -\frac{\text{प}}{२}$

जेव्हा कचे चिन्ह धन आहे तेव्हा ही दोन्ही मुळे वास्तविक आहेत, परंतु जेव्हा कचे चिन्ह ऋण आहे आणि जर  $\frac{\text{प}^2}{४} > \text{क}$ , तर मात्र ती मुळे वास्तविक आहेत; कारण, जर  $\frac{\text{प}^2}{४} < \text{क}$  आणि क पद ऋण आहे तर,  $\frac{\text{प}^2}{४} - \text{क}$  हेही पद ऋण होईल, आणि ऋणपदाचें वर्गमूळ नाही, म्हणून  $\sqrt{\frac{\text{प}^2}{४} - \text{क}}$  हे केवळ कल्पित पद होईल.

$\text{अ}^{\frac{३}{२}} + \text{ब}^{\frac{३}{२}} = \text{क}$ , असल्या रूपांचीं समीकरणें म्हणजे ज्या समीकरणांच्या पहिल्या पदांनील अव्यक्तपदाचा घात दुसऱ्या पदांनील अव्यक्तपदा-

च्या घाताच्या दुप्पट असतो तीं समीकरणे संयुक्तवर्ग समीकरणांच्या रीतीनेच सोडवता येतात

### उदाहरणे.

१.  $x^4 - 19x^2 = 0$ , वर्ग पुरा कर.

$$x^4 - 19x^2 + \left(\frac{19}{2}\right)^2 = 0 + \frac{361}{4} = \frac{361}{4} + \frac{361}{4} = \frac{722}{4}, \text{ वर्गमूळकाढ.}$$

$$x^2 - \frac{19}{2} = \pm \frac{19}{2}, x^2 = \pm \frac{19}{2} \pm \frac{19}{2} = \frac{19}{2}, \text{ किंवा } -\frac{19}{2} = 0, \text{ किंवा } -9,$$

$$\therefore x = \pm \sqrt{\frac{19}{2}}, \text{ किंवा } \pm \sqrt{-9} = \pm 3\sqrt{-1}, \text{ किंवा } \pm \sqrt{-9}.$$

हे चतुर्घात समीकरण आहे, म्हणून ह्याम जींचार मुळे असतात तीं,  $+3\sqrt{-1}, -3\sqrt{-1}, +\sqrt{-9}$ , आणि  $-\sqrt{-9}$ , हीं आहेत, ह्यांपैकी पहिलीं दोन मुळे वास्तविक आहेत, आणि बाकीचीं दोन कल्पित आहेत.

$$2. \frac{1}{3} \sqrt{x^3 + \frac{x}{2} + \frac{10}{2}} + \frac{2x^3 + x}{4} = \frac{63}{4}.$$

$$\frac{1}{3} \sqrt{x^3 + \frac{x}{2} + \frac{10}{2}} + \frac{x^3}{2} + \frac{x}{4} = \frac{63}{4}, \text{ दोहोनीगुण.}$$

$$\frac{2}{3} \sqrt{x^3 + \frac{x}{2} + \frac{10}{2}} + x^3 + \frac{x}{2} = \frac{63}{2}, \text{ मल्यकवाजून}$$

$$x^3 + \frac{x}{2} + \frac{10}{2} + \frac{2}{3} \sqrt{x^3 + \frac{x}{2} + \frac{10}{2}} = 40,$$

$$\text{आतां } \therefore \left(x^3 + \frac{x}{2} + \frac{10}{2}\right) \text{ हा } \sqrt{x^3 + \frac{x}{2} + \frac{10}{2}} \text{ ह्याचा}$$



वर्ग आहे,  $\therefore$  ह्या समीकरणास संयुक्तसमीकरणांचें रूप आलें, आणि म्हणून वर्ग पुरा केल्यानें :

$$\left(x^2 + \frac{8x}{2} + \frac{16}{2}\right) + \frac{2}{3} \sqrt{x^2 + \frac{8x}{2} + \frac{16}{2} + \frac{1}{3}} = \frac{269}{9},$$

$$\sqrt{x^2 + \frac{8x}{2} + \frac{16}{2} + \frac{1}{3}} = \pm \frac{15}{3},$$

$$\sqrt{x^2 + \frac{8x}{2} + \frac{16}{2}} = \frac{\pm 15 - 1}{3} = \frac{14}{3} = ६, \text{ किंवा } -\frac{२०}{३};$$

ह्या समीकरणाच्या दोन्ही बाजूंचे वर्ग केल्यानें,

$$x^2 + \frac{8x}{2} + \frac{16}{2} = ३६, \text{ किंवा } \frac{४००}{९};$$

प्रथमतः ३६ ही किंमत धरल्यानें,

$$x^2 + \frac{1}{2} 8x = ३६ - \frac{16}{2} = \frac{७२ - 16}{2} = \frac{५६}{२},$$

$$\left[x^2 + \frac{1}{2} 8x + \frac{9}{4}\right] = \frac{५६}{२} + \frac{9}{4} = \frac{४४०}{१६} + \frac{9}{१६} = \frac{४४९}{१६}$$

$$x + \frac{9}{4} = \pm \frac{२१}{४},$$

$$\therefore x = \frac{\pm २१ - ९}{४} = \frac{२०}{४}, \text{ किंवा } -\frac{२२}{४} = ५, \text{ किंवा } -\frac{११}{२}.$$

पुनः  $\frac{४००}{९}$  ही किंमत धरल्यानें,

$$x^2 + \frac{1}{2} 8x = \frac{४००}{९} - \frac{16}{२} = \frac{८०० - १५३}{१८} = \frac{६४७}{१८},$$

$$x^3 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} = \frac{5910}{12} + \frac{1}{12} = \frac{5911}{12} + \frac{1}{12} = \frac{5912}{12},$$

$$x + \frac{1}{2} = \pm \sqrt{\frac{5912}{12}}, \therefore x = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{5912}{12}}.$$

$$\text{ह्या करितां } x = 9, \text{ किंवा } -\frac{11}{2}, \text{ किंवा } \frac{-3 \pm \sqrt{5912}}{12}.$$

$$३. \quad x^3 - ३x = २, \quad x \text{ ने गुण.}$$

$$x^3 - ३x^2 = २x, \quad x^3 - २x^2 = x^3 + २x,$$

$$x^3 - २x^2 + १ = x^3 + २x + १.$$

$$x^3 - १ = २x + १, \quad x^3 - २x = २,$$

$$x^3 - २x + \frac{1}{2} = २ + \frac{1}{2} = \frac{5}{2}, \quad x - \frac{1}{2} = \pm \frac{5}{2},$$

$$x = \frac{9 \pm 3}{2} = \frac{५}{२}, \text{ किंवा } -\frac{३}{२} = २, \text{ किंवा } -१.$$

$$४. \quad x^3 - २x = ४, \quad x \text{ ने गुण.}$$

$$x^3 - २x^2 = ४x, \text{ प्रत्येक बाजूत } ४x^2 \text{ मिळीव}$$

$$x^3 + २x^2 = ४x^2 + ४x + १,$$

$$x^3 + २x^2 + १ = ४x^2 + ४x + १,$$

$$x^3 + १ = \pm (२x + १), \quad x^3 = २x, \quad \therefore x = २.$$

$$\text{उतः } x^3 + १ = -२x - १, \quad x^3 + २x + १ = -१,$$

$$x + १ = \pm \sqrt{-१}, \quad \therefore x = १ \pm \sqrt{-१}.$$

$$५. (x^3-4)^2 = (x-3)^2 + (x+9)^2.$$

$$x^3-9x^2+24x= x^3-6x^2+9x+x^3+24x+9,$$

$$x^3-9x^2+24x+9=0,$$

$$x^3-6x^2=8x^2-8x-9,$$

$$x^3-6x^2+9x=8x^2-8x+9.$$

$$x^3-8= \pm (2x-9), \quad x^3-2x=3,$$

$$x^3-2x+9=8, \quad x-9= \pm 2.$$

$$\therefore x=9 \pm 2=3, \text{ किंवा } -9.$$

$$\text{पुनः } x^3-8=-2x+9, \quad x^3+2x=4,$$

$$x^3+2x+9=6, \quad x+9= \pm \sqrt{6}$$

$$\therefore x= \pm \sqrt{6}-9.$$

$$६. x^3-x^2=8, \quad ४ \text{ त्थानी गूण}$$

$$४x^3=४x^3+१६, \text{ प्रत्येक बाजूत } x^3+४x^3 \text{ होमिळाव.}$$

$$x^3+४x^3+४x^3=x^3+८x^3+१६, \text{ वर्गमूळकाढ.}$$

$$x^3+२x^3=x^3+४,$$

$$२x^3=४, \quad \therefore x=2.$$

$$७. (x-1)\sqrt{2x-x^3}=\frac{1}{2}, \text{ वर्गकर.}$$

$$(x^3-2x+1)(2x-x^3)=\frac{1}{4},$$

$$-x^3+४x^3-५x^3+२x=\frac{1}{4},$$

$$४x^3 - १६x^2 + २०x - ८ = -१,$$

$$(२x^3 - ४x^2) + २(२x^3 - ४x^2) + १ = ०, \text{ वर्गमूळकाट.}$$

$$२x^3 - ४x^2 + १ = ०, \quad x^3 - २x^2 = -\frac{१}{२},$$

$$x^3 - २x^2 + १ = ० - \frac{१}{२} = -\frac{१}{२}, \quad x^2 - १ = \pm \sqrt{-\frac{१}{२}},$$

$$\therefore x = १ \pm \frac{१}{\sqrt{२}} = \frac{\sqrt{२} \pm १}{\sqrt{२}}.$$

$$८. \quad x - २\sqrt{x+२} = १ + \sqrt[४]{x^3 - ३x + २}.$$

$$(x-१) - २\sqrt{x+२} = \sqrt[४]{(x-१)^2(x+२)}$$

$$= \sqrt{x-१} \cdot \sqrt{x+२},$$

$$(x-१) - \sqrt{x-१} \cdot \sqrt{x+२} = २\sqrt{x+२},$$

$$(x-१) - \sqrt{x+२} \cdot \sqrt{x-१} + \frac{१}{४}\sqrt{x+२} =$$

$$२\sqrt{x+२} + \frac{१}{४}\sqrt{x+२} = \frac{९}{४}\sqrt{x+२},$$

$$\sqrt{x-१} - \frac{१}{४}\sqrt{x+२} = \pm \frac{३}{४}\sqrt{x+२},$$

$$\sqrt{x-१} = २\sqrt{x+२}, \quad x-१ = ४(x+२),$$

$$x^3 - २x^2 + १ = १६x + ३२, \quad x^3 - १८x = ३१,$$

$$x^3 - १८x + ९ = ८१ + ३१ = ११२ = १६ \times ७,$$

$$x-९ = \pm ४\sqrt{७}, \quad \therefore x = ९ \pm ४\sqrt{७}.$$

$$\text{अतः } \sqrt{x-१} = -\sqrt{x+२},$$

$$x^3 - २x^2 + १ = x+२, \quad x^3 - ३x = १,$$

$$x^2 - 3x + \frac{3}{2} = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}, \quad x - \frac{3}{2} = \pm \frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\therefore x = \frac{3 \pm \sqrt{3}}{2} = \frac{1}{2} (3 \pm \sqrt{3}).$$

$$\sqrt{a^2 x^2 + x} \sqrt{a^2 - 1} = a^2 \sqrt{1 - x^2}.$$

$$a^2 - x^2 + x^2(a^2 - 1) + 2ax(a^2 - x^2)(a^2 - 1) = a^2(1 - x^2),$$

$$a^2 - x^2 + a^2 x^2 - x^2 + 2ax(a^2 - x^2 - a^2 + x^2) = a^2 - a^2 x^2,$$

$$a^2 - a^2 x^2 - a^2 + x^2 - 2ax \sqrt{a^2 - x^2} - a^2 + x^2 + x^2 = -a^2 x^2,$$

$$\sqrt{a^2 - x^2} - a^2 + x^2 = a^2 x + x,$$

$$a^2 - a^2 x^2 - a^2 + x^2 = x^2 a^2 + 2a^2 x^2 + x^2,$$

$$a^2 - a^2 = a^2 x^2 + 3a^2 x^2, \quad a^2 - 1 = a^2 x^2 + 3x^2,$$

$$(a^2 + 3)x^2 = a^2 - 1, \quad x^2 = \frac{a^2 - 1}{a^2 + 3}, \quad \therefore x = \left( \frac{a^2 - 1}{a^2 + 3} \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$90. \quad \sqrt{x - \frac{1}{x}} + \sqrt{1 - \frac{1}{x}} = x.$$

$$\sqrt{1 - \frac{1}{x}} = x - \sqrt{x - \frac{1}{x}},$$

$$1 - \frac{1}{x} = x^2 - 2x \sqrt{x - \frac{1}{x}} + x - \frac{1}{x},$$

$$x^2 - 1 - 2x \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{\sqrt{x}} + x = 0,$$

$$x^3 - 1 - 2x^2 \sqrt{x^2 - 1} + x = 0,$$

$$\sqrt{x^2 - 1} - x^2 = 0, \sqrt{x^2 - 1} = x^2, x^2 - 1 = x,$$

$$x^2 - x = 1, x^2 - x + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 1 + \frac{1}{4} = \frac{5}{4},$$

$$x - \frac{1}{2} = \pm \frac{\sqrt{5}}{2}, \therefore x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}.$$

$$११. \left(\frac{1+x}{1-x}\right)^2 + \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} \cdot \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} = 2\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}.$$

$$\frac{\sqrt{1+x}}{\sqrt{1-x}} + \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} \cdot \frac{\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}} = 2\sqrt{\frac{1-x}{1+x}},$$

$$\frac{\sqrt{1+x}}{\sqrt{1-x}} + \frac{\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}} = 2\sqrt{\frac{1-x}{1+x}} \cdot \frac{\sqrt{1+x}}{\sqrt{1-x}}; \therefore \times \frac{\sqrt{1+x}}{\sqrt{1-x}}.$$

$$\frac{\sqrt{1+x}}{\sqrt{1-x}} - 2\sqrt{\frac{1-x}{1+x}} \cdot \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} + \frac{\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}} = 0,$$

$$\sqrt{\frac{1+x}{1-x}} - \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} = 0,$$

$$\sqrt{\frac{1+x}{1-x}} = \sqrt{\frac{1-x}{1+x}},$$

$$\frac{1+x}{1-x} = \frac{1-x}{1+x}, \therefore x = -x.$$

$$१२. \frac{1+x}{(1+x)^2} = \frac{1}{2}.$$

$$२ + २ \text{ क्ष} = १ + ४ \text{ क्ष} + ६ \text{ क्ष}^२ + ४ \text{ क्ष}^३ + \text{क्ष}^४,$$

$$\text{क्ष}^४ - ४ \text{ क्ष}^३ - ६ \text{ क्ष}^२ - ४ \text{ क्ष} + १ = ०, \quad \text{क्ष}^२ \text{ ह्यानें भाग.}$$

$$\text{क्ष}^२ - ४ \text{ क्ष} - ६ - \frac{४}{\text{क्ष}} + \frac{१}{\text{क्ष}^२} = ०,$$

$$\text{क्ष}^२ + \frac{१}{\text{क्ष}^२} - ४ \text{ क्ष} - \frac{४}{\text{क्ष}} = ६, \quad \text{प्रत्येक बाजूंत २ मिळीव.}$$

$$\text{क्ष}^२ + २ + \frac{१}{\text{क्ष}^२} - ४ \left( \text{क्ष} + \frac{१}{\text{क्ष}} \right) = ०,$$

$$\left( \text{क्ष} + \frac{१}{\text{क्ष}} \right)^२ - ४ \left( \text{क्ष} + \frac{१}{\text{क्ष}} \right) + २ = ० + ४ = १२,$$

$$\text{क्ष} + \frac{१}{\text{क्ष}} - २ = \pm २\sqrt{३},$$

$$\text{क्ष}^२ + १ - २ \text{ क्ष} = \pm २\sqrt{३} \cdot \text{क्ष},$$

$$\text{क्ष}^२ - (२ \pm २\sqrt{३}) \text{ क्ष} = -१,$$

$$\begin{aligned} \text{क्ष}^२ - २(१ \pm \sqrt{३}) \text{ क्ष} + (१ \pm \sqrt{३})^२ &= १ \pm २\sqrt{३} + ३ - १ \\ &= ३ \pm २\sqrt{३}, \end{aligned}$$

$$\text{क्ष} - (१ \pm \sqrt{३}) = \pm \sqrt{३ \pm २\sqrt{३}},$$

$$\therefore \text{क्ष} = १ \pm \sqrt{३} \pm \sqrt{३ \pm २\sqrt{३}}.$$

१३.  $२ \text{ क्ष}^३ - \text{क्ष}^२ = १$ ,  $२ \text{ क्ष} + १$  ह्यानें गुण.

$$४ \text{ क्ष}^४ - \text{क्ष}^२ = २ \text{ क्ष} + १, \quad ४ \text{ क्ष}^४ = \text{क्ष}^२ + २ \text{ क्ष} + १,$$

$$२क्ष^२ = क्ष + १, \quad क्ष^२ - \frac{क्ष}{२} = \frac{१}{२},$$

$$क्ष^२ - \frac{क्ष}{२} + \frac{१}{१६} = \frac{१}{२} + \frac{१}{१६} = \frac{८}{१६} + \frac{१}{१६} = \frac{९}{१६}.$$

$$क्ष - \frac{१}{४} = \pm \frac{३}{४}, \quad \therefore क्ष = \frac{१ \pm ३}{४} = १, \text{ किंवा } -\frac{१}{२}.$$

अक्ष<sup>२</sup> ± बक्ष<sup>२</sup> = क, ह्या प्रकारचें कोणतेंही समीकरण असल्यास त्यास ही रीति लागू पडेल; म्हणजे, अक्ष ३ व ह्यांनीं गुणून तें समीकरण सोडवितां येईल; येथें नेह्मां क्ष<sup>२</sup> च्या वेळाप्रकाशकाचें चिन्ह धन असेल, तेव्हां बरील चिन्ह घ्यावें, आणि कृण असेल तेव्हां खालचें चिन्ह घ्यावें.

परंतु ह्या रीतीनें समीकरणांत नवा गुणक शिरतो, ह्यास्तव त्या गुणकाची किंमत ० धरूनये. कारण, ० किंमत धरली असतां क्षच जी किंमत येईल ती विवक्षित समीकरणांत जमणार नाही.

हीं पुढील संयुक्तवर्गसमीकरणें सोडीव.

१. क्ष<sup>२</sup> - ८क्ष = ९, ह्यांत क्षच्या किंमती काढ.

उत्तर. क्ष = ९, किंवा -१.

२. क्ष<sup>२</sup> + १२क्ष - १६ = ९२. उत्तर. क्ष = ६, किंवा -१८.



$$३. \quad \text{क्ष}^३ - ३\text{क्ष} = १०. \quad \text{उत्तर. क्ष} = ९, \text{किंवा} - २.$$

$$४. \quad \text{क्ष}^३ - \text{क्ष} + ३ = ४९. \quad \text{उत्तर. क्ष} = ७, \text{किंवा} - ६.$$

$$५. \quad ५\text{क्ष}^३ + \text{क्ष} = ४. \quad \text{उत्तर. क्ष} = \frac{४}{५}, \text{किंवा} - १.$$

$$६. \quad २\text{क्ष}^३ - \text{क्ष} = २१. \quad \text{उत्तर. क्ष} = \frac{७}{२}, \text{किंवा} - ३.$$

$$७. \quad ५\text{क्ष}^३ + ६\text{क्ष} = ६३. \quad \text{उत्तर. क्ष} = ३, \text{किंवा} - \frac{२१}{५}.$$

$$८. \quad \text{क्ष} - १ = -\frac{१}{\text{क्ष}}. \quad \text{उत्तर. क्ष} = \frac{१ \pm \sqrt{-३}}{२}.$$

$$९. \quad (\text{क्ष} - १२)(\text{क्ष} + ३) = ०. \quad \text{उत्तर. क्ष} = १२, \text{किंवा} - ३.$$

$$१०. \quad ३\text{क्ष}^३ - १४\text{क्ष} + १९ = ०. \quad \text{उत्तर. क्ष} = ३, \text{किंवा} \frac{१३}{३}.$$

$$११. \quad २\text{क्ष}^३ - ११\text{क्ष} = -१. \quad \text{उत्तर. क्ष} = ७, \text{किंवा} -\frac{१}{२}.$$

$$१२. \quad \text{अक्ष}^३ - बक्ष = क. \quad \text{उत्तर. क्ष} = \frac{ब \pm \sqrt{ब^३ + ४अक}}{३अ}.$$

$$१३. \quad ४\text{क्ष}^३ - \frac{१४ - ६१}{\text{क्ष} + १} = १४. \quad \text{उत्तर. क्ष} = ४, \text{किंवा} - \frac{७}{४}.$$

$$१४. \quad \text{क्ष}^३ - ४\text{अक्ष} = -७\text{अ}. \quad \text{उत्तर. क्ष} = (२ \pm \sqrt{-३})\text{अ}.$$

$$१५. \quad \frac{१०}{\text{क्ष}} - \frac{१४ - २६१}{\text{क्ष}^३} = \frac{२२}{९}. \quad \text{उत्तर. क्ष} = ३, \text{किंवा} \frac{२१}{११}.$$

$$१६. \quad \text{क्ष} + \frac{+}{\sqrt{५\text{क्ष} + १०}} = ८. \quad \text{उत्तर. क्ष} = १८, \text{किंवा} ३.$$

+ हैं उदाहरण सोडविताना  $\sqrt{५\text{क्ष} + १०} = ५$ , किंवा  $-१०$  ये नात, ∴  
 १८ उत्तरानें ताळा पाहातांना  $\sqrt{५\text{क्ष} + १०} = -१०$  घ्यावे, आणि ३ उ  
 त्तरानें ताळा पाहातांना  $\sqrt{५\text{क्ष} + १०} = ५$  घ्यावे. हीच गोष्ट, पुढील कि  
 ती एक उदाहरणांवा ताळा पाहाताना, लक्षांत ठेवावी.

$$१७. \frac{३६+४}{५} - \frac{३०-२६}{६-६} = \frac{७६-१४}{१०}.$$

उत्तर.  $६=३६$ , किंवा  $१२$ .

$$१८. ६+\sqrt{१०६+६}=९. \text{ उत्तर. } ६=२५, \text{ किंवा } ३.$$

$$१९. (६+२)^३=२६^३+८. \quad \text{उत्तर. } ६=२.$$

$$२०. \frac{६+२२}{३} - \frac{९६-६}{२} = \frac{४}{६}.$$

उत्तर.  $६=२$ , किंवा  $\frac{१२}{२५}$ .

$$२१. \frac{२६}{९} - २ = \frac{३६-१६}{१८} - \frac{४६-३}{४६+३}.$$

उत्तर.  $६=६$ , किंवा  $-४\frac{३}{२}$ .

$$२२. \frac{६-३}{६+५} - \frac{६+४}{६-७} = २\frac{७}{९}.$$

उत्तर.  $६=४$ , किंवा  $-\frac{२९}{२५}$ .

$$२३. ६^३-(अ+ब)६+अब=०.$$

उत्तर.  $६=अ$ , किंवा  $ब$ .

$$२४. ४६+४\sqrt{६+२}=७.$$

उत्तर.  $६=४\frac{१}{४}$ , किंवा  $\frac{१}{४}$ .

$$२५. \quad \text{क्ष} = \frac{\text{क्ष}-९}{\text{क्ष}+३} + १५.$$

$$\text{उत्तर. } \text{क्ष} = \{(-३)^2 = ९\} \text{ किंवा } \{(+४)^2 = १६\}$$

$$२६. \quad \sqrt{\text{क्ष}+६} + \sqrt{\text{क्ष}+३} = ३ \sqrt{\text{क्ष}}$$

$$\text{उत्तर. } \text{क्ष} = \frac{९ \pm \sqrt{७६}}{५}$$

$$२७. \quad \frac{\sqrt{४\text{क्ष}+२०}}{४+\sqrt{\text{क्ष}}} = \frac{४-\sqrt{\text{क्ष}}}{\sqrt{\text{क्ष}}}$$

$$\text{उत्तर. } \text{क्ष} = ४, \text{ किंवा } -\frac{६४}{३}$$

$$२८. \quad \sqrt{\text{क्ष}+२} = \sqrt{७+३\text{क्ष}}$$

$$\text{उत्तर. } \text{क्ष} = ९, \text{ किंवा } १.$$

∴ ∵ अं हा+ अ-चा किंवा -अ-चा वर्ग आहे, हे जेव्हा माहीत नाही तेव्हा अं ह्याचे वर्गमूळ ± अ घ्यावे, पण जेव्हा अं हा+ अ-चा वर्ग असें माहीत आहे तेव्हा अं चे वर्गमूळ + अ घ्यावे आणि जेव्हा अं हा-अ-चा वर्ग असें माहीत आहे तेव्हा अं चे वर्गमूळ - अ घ्यावे; असेंच वरील उत्तरांत ९ आणि १६ हे अनुक्रमे -३ आणि +४ ह्यांचे वर्ग आहेत म्हणून ९ आणि १६ ह्यांची वर्गमूळे -३ आणि +४ घ्यावी. ह्या गोष्टीकडे लोका दुर्लक्ष्य करितात ते न करावे, म्हणून वरील उत्तरांत  $(-३)^2 = ९$  आणि  $(+४)^2 = १६$  असे लिहिले आहे. हीच गोष्ट पुढील कितीएक उदाहरणांस लागू आहे.

$$२९. \frac{x}{x+9} + \frac{x+9}{x} = २\frac{१}{६}.$$

उत्तर.  $x=२$ , किंवा  $-३$ .

$$३०. \frac{४x^2}{३} = \frac{x}{३} + ११. \text{ उत्तर. } x=३, \text{ किंवा } -२\frac{३}{४}.$$

$$३१. \sqrt{x-a} + \sqrt{x+b} = २\sqrt{x}.$$

$$\text{उत्तर. } x = \frac{(a+b)^2}{८(b-a)}.$$

$$३२. \frac{\sqrt{a^3x+b}}{a+\sqrt{x}} = \frac{a-\sqrt{x}}{\sqrt{x}}.$$

$$\text{उत्तर. } x = \frac{-(२a^3+b) \pm \sqrt{४a^3+४a^3b+b^2}}{२(a^3-१)}.$$

$$३३. \frac{x+४}{३} - \frac{४x+७}{९} = \frac{७-x}{x-३} - १.$$

उत्तर.  $x=२१$ , किंवा  $९$ .

$$३४. \sqrt{५a+x} + \sqrt{५a-x} = \frac{१२a}{\sqrt{५a+x}}.$$

उत्तर.  $x=४a$ , किंवा  $३a$ .

$$३५. x^2 - ८x^3 = ९.$$

उत्तर.  $x=\pm ३$ , किंवा  $\pm \sqrt{-१}$ .

३६.  $x^5 - 4x^3 = 32$ . उत्तर.  $x=2$ , किंवा  $x=-2$ .

३७.  $\frac{nx+b}{\sqrt{x}} = \frac{nx+b}{\sqrt{x}}$ .

उत्तर.  $x=a$ , किंवा  $\frac{b^2}{a^2}$ .

३८.  $x^2 - 2x^3 = 3$ . उत्तर.  $x = \pm \sqrt{3}$ , किंवा  $\pm \sqrt{-1}$ .

३९.  $\sqrt{4a+x} + \sqrt{a+x} = 2\sqrt{a+x}$ .

उत्तर.  $x = -\frac{9}{4}a$ .

४०.  $x^2 - x^3 = 4$ . उत्तर.  $x=4$ , किंवा  $x\sqrt{4}$ .

४१.  $x+4 = \sqrt{x+4} + 4$ .

उत्तर.  $x=4$ , किंवा  $-9$ .

४२.  $\sqrt{(2x+1)} + 2\sqrt{x} = \frac{29}{\sqrt{(2x+1)}}$

उत्तर.  $x=4$ , किंवा  $-29$ .

४३.  $x^5 + 20x^3 = 69$ . उत्तर.  $x=\sqrt{3}$ , किंवा  $x\sqrt{-3}$ .

४४.  $\frac{a+x}{\sqrt{a-x}} + \frac{a-x}{\sqrt{a+x}} = 2\sqrt{a}$ .

उत्तर.  $x = \pm a\sqrt{2-11}$ .

$$४९. \text{क्ष} \sqrt{\frac{\text{अ}}{\text{क्ष}}} - १ = \sqrt{\text{क्ष}^३ - \text{ब}^३}.$$

$$\text{उत्तर. क्ष} = \frac{१}{४} (\text{अ} \pm \sqrt{\text{अ}^३ + ८\text{ब}^३}).$$

$$४६. (\text{अ}+१) (\text{क्ष}-१)^३ = २ (\text{क्ष}^३+१).$$

$$\text{उत्तर. क्ष} = \frac{\sqrt{\text{अ}+१}}{\sqrt{\text{अ}-१}}, \text{ किंवा } \frac{\sqrt{\text{अ}-१}}{\sqrt{\text{अ}+१}}.$$

$$४७. \text{क्ष}^३ - ७\text{क्ष} + \sqrt{\text{क्ष}^३ - ७\text{क्ष} + १८} = २४.$$

$$\text{उत्तर. क्ष} = ९, \text{ किंवा } -२, \text{ किंवा } \frac{७ \pm \sqrt{१७३}}{२}.$$

$$४८. \left(\frac{१}{\text{क्ष}}\right)^३ + \text{अ} = \left(\frac{१}{\text{क्ष}}\right)^{\frac{३}{२}}.$$

$$\text{उत्तर. क्ष} = \left\{ \frac{१ \mp \sqrt{१-४\text{अ}}}{२\text{अ}} \right\}^{\frac{२}{३}}.$$

$$४९. \frac{५\text{क्ष}}{५} + \frac{१२५}{५\text{क्ष}} = ७०. \text{ उत्तर क्ष} = २, \text{ किंवा } १.$$

$$५०. \sqrt{\text{अ}-\text{क्ष}} + \sqrt{\text{अ}+\text{क्ष}} = \frac{\text{ब}}{\sqrt{\text{अ}+\text{क्ष}}}.$$

$$\text{उत्तर. क्ष} = \frac{१}{३} (\text{ब}-\text{अ} \pm \sqrt{\text{अ}^३ + २\text{अब}-\text{ब}^३}).$$

$$६४. \text{अक्ष} + २\sqrt{n^2\text{क्ष} + n\text{अक्ष}^2} = (३\text{क्ष} - १)n.$$

$$\text{उत्तर. क्ष} = \frac{n}{n-\text{अ}}, \text{किंवा } \frac{n}{n-\text{अ}}.$$

$$६५. २(\sqrt{१-\text{क्ष}+१}) = \frac{\text{क्ष}}{\sqrt{१+\text{क्ष}-१}}.$$

$$\text{उत्तर. क्ष} = \frac{२४}{२५}, \text{किंवा } ०.$$

$$६६. \left(\text{क्ष} - \frac{\text{अब}}{\text{क्ष}}\right)^2 = \frac{\text{अ}^2 + \text{अब}}{२} \cdot \left(\frac{\text{अ}^2}{\text{क्ष}^2} + १\right).$$

$$\text{उत्तर. क्ष} = \sqrt{\text{अ}^2 + २\text{अब}}, \text{किंवा } \sqrt{\text{अब}}, \text{अ}.$$

$$६७. (\text{क्ष}-\text{ब})^2 + २\text{बक्ष} = \text{ब}^2(\text{क्ष}+\text{ब})^2 + २(\text{क्ष}-\text{ब})^2$$

$$\text{उत्तर. क्ष} = २\text{ब}.$$

$$६८. \text{क्ष} = -१.$$

$$\text{उत्तर. क्ष} = \sqrt[४]{-१}, \text{किंवा } \pm \sqrt[४]{१} \pm \sqrt[४]{-१}$$

$$६९. \text{क्ष}^2 - २\text{क्ष}^3 + \text{क्ष}^4 = ६.$$

$$\text{उत्तर. क्ष} = \sqrt[३]{\frac{१}{२} \pm \frac{१}{२}\sqrt{१३}}, \text{किंवा } \sqrt[३]{\frac{१}{२} \pm \frac{१}{२}\sqrt{-७}}$$

$$७०. \{(\text{क्ष}-२)^2 - \text{क्ष}\}^2 - १० + \text{क्ष} = (\text{क्ष}-२)^2.$$

$$\text{उत्तर. क्ष} = ६, \text{किंवा } -१, \text{किंवा } \frac{१ \pm ३\sqrt{-३}}{२}.$$

$$७१. \sqrt{(१+क्ष)^२} - \sqrt{(१-क्ष)^२} = \sqrt{१-क्ष^२}.$$

$$\text{उत्तर. क्ष} = \frac{(१ \pm \sqrt{५})^२ - २}{(१ \pm \sqrt{५})^२ + २}.$$

$$७२. ८क्ष^३ + ४क्ष^२ - १८क्ष + ११क्ष - २ = ०.$$

$$\text{उत्तर. क्ष} = \frac{१}{२}, \text{किंवा } -२.$$

$$७३. ४क्ष^३ - २० - ५(क्ष + \frac{३}{क्ष}) = -\frac{३६}{क्ष^२}.$$

$$\text{उत्तर. क्ष} = ३, १, \text{किंवा } \frac{-११ \pm \sqrt{-७१}}{८}.$$

$$७४. \frac{१}{(क्ष-४)^३} + \frac{(क्ष-४)^३}{२} = \frac{१७}{४(क्ष-४)^३}.$$

$$\text{उत्तर. क्ष} = १२, \text{किंवा } ४\frac{१}{३}.$$

$$७५. क्ष^३ + ४क्ष^२ + ३क्ष + ४क्ष + १ = ०.$$

$$\text{उत्तर. क्ष} = \frac{-३ \pm \sqrt{३} \pm \sqrt{(३ \mp ४\sqrt{३})}}{२}$$

$$७६. (अ^३ + १)(क्ष^३ - १)^३ = २(क्ष + १).$$

$$\text{उत्तर. क्ष} = \left( \frac{अ^३ \pm १^३}{अ^३ \mp १} \right)^३.$$



$$७७. (x^2 - 9)^2 - 3 = 99(x^2 - 2)$$

$$\text{उत्तर } x = \pm 4, \text{ किंवा } \pm 2$$

$$७८. \sqrt{x + 2x - 1} - \sqrt{x - 2x - 1} = \frac{2}{x} \sqrt{x + \frac{10x}{2x - 1}}$$

$$\text{उत्तर } x = \frac{5}{2}, \text{ किंवा } \frac{4}{3}$$

$$७९. \frac{a - \sqrt{2ax - x^2}}{a + \sqrt{2ax - x^2}} = \frac{x}{a - x}$$

$$\text{उत्तर } x = a, \text{ किंवा } \frac{a}{2}$$

$$८०. \frac{x^2 - 16}{x - 12} = \frac{4}{x^2}$$

$$\text{उत्तर } x = 4 \text{ किंवा } 2, \text{ किंवा } 9 \pm \sqrt{5}$$

$$८१. x + 4 + \left( \frac{x + 4}{x - 4} \right)^2 = \frac{16}{x - 4}$$

$$\text{उत्तर } x = \pm 4, \text{ किंवा } \pm 8$$

$$८२. (x + 999)^2 + (100 - x)^2 = 0$$

$$\text{उत्तर } x = 0$$

$$८३. x^2 + x^2 - 4x^2 + x + 1 = 0$$

$$\text{उत्तर } x = 1, \text{ किंवा } \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

$$८४. 2x^2 + \sqrt{x^2 + 9} = x^2 - 9$$

$$\text{उत्तर. क्ष} = \sqrt{\frac{3 \pm \sqrt{49}}{2}}, \text{किंवा } \sqrt{\frac{1 \pm \sqrt{36}}{2}}$$

$$८५. (अ + क्ष) \sqrt{अ^2 + क्ष^2} = ६(अ - क्ष)^2.$$

$$\text{उत्तर. क्ष} = \frac{१ \pm ४\sqrt{२}}{७} अ.$$

$$८६. (क्ष + ३)^2 - २(क्ष^2 + ३) = २क्ष(क्ष + १)^2.$$

$$\text{उत्तर. क्ष} = १, २\frac{१}{२}, -३, \text{किंवा } -\frac{१}{२}.$$

$$८७. \frac{क्ष}{क्ष^2 + ४क्ष} + \frac{क्ष}{क्ष^2 - ३क्ष} = १\frac{१}{८}.$$

$$\text{उत्तर. क्ष} = ४, \text{किंवा } -१\frac{३}{४}.$$

$$८८. क्ष^2 - ३क्ष - १, क्ष^2 + २१क्ष - १०क्ष + २४ = ०.$$

$$\text{उत्तर. क्ष} = २, ४, -३, \text{किंवा } \pm \sqrt{-१}.$$

$$८९. \frac{क्ष^2 + १}{क्ष} - \frac{१}{\sqrt{५}} \cdot \frac{क्ष - १}{\sqrt{क्ष}} = ४\frac{२}{५}.$$

$$\text{उत्तर. क्ष} = १, \frac{१}{५}, \text{किंवा } \frac{१ \pm \sqrt{१ + ३\sqrt{५}}}{१०}.$$

$$९०. १६(क्ष^2 + २)^2 + \frac{३}{\sqrt{क्ष + २}} = ३२क्ष^2 + ४८.$$

$$\text{उत्तर. क्ष} = \pm \frac{१}{३}.$$

$$९१. \frac{क्ष}{क्ष - अ} = \frac{अ}{क्ष + १} + १.$$

$$\text{उत्तर. } x = \sqrt{\frac{3}{2}} \pm \sqrt{a + \frac{1}{2}}.$$

$$९२. x^3 - 6x^2 + 10x^3 + 24x + 4 = 0.$$

$$\text{उत्तर. } x = 4, -1, \text{ किंवा } 2 \pm \sqrt{3}.$$

$$९३. \frac{1+x^2}{(1+x)^2} = \frac{1}{3}. \quad \text{उत्तर. } x = 2, \text{ किंवा } \frac{1}{2}.$$

$$९४. \frac{(x-a)^2}{\sqrt{x}} + 2(x-a) = -\frac{a^2}{\sqrt{x}} + 9.$$

$$\text{उत्तर. } x = 2a + \frac{3}{2} \pm \sqrt{2a + \frac{5}{2}}.$$

$$९५. \sqrt{x^2-9} + \frac{x\sqrt{x-9}}{\sqrt{x+9}} = \frac{\sqrt{(x+9)^3}}{\sqrt{x-9}}.$$

$$\text{उत्तर. } x = \frac{3 \pm \sqrt{90}}{2}.$$

$$९६. (1+x^2)(1+x^2)(1+x) = 30x^2.$$

$$\text{उत्तर. } x = \frac{3 \pm \sqrt{2}}{2}.$$

$$९७. \frac{x^3}{2} + \frac{10x^2}{4} - 10x = 0.$$

$$\text{उत्तर. } x = -5, \text{ किंवा } -\frac{1}{2}.$$

$$९८. x^2(x^2-23) = 10x(x^2-24) + 640.$$

$$\text{उत्तर. } x = \frac{1}{2}(4 \pm 3\sqrt{19}).$$

$$९९. \frac{1+x^3}{(1+x)^3} + \frac{1-x^3}{(1-x)^3} = \text{अ.}$$

$$\text{उत्तर. } x = \left\{ \frac{(a+4 \pm 2\sqrt{3(a+1)})^{\frac{1}{3}}}{a-2} \right\}.$$

$$१००. x + 7\sqrt{x} = 22.$$

$$\text{उत्तर. } x = 4, \text{ किंवा } (-1 \pm \sqrt{-10}).$$

$$१०१. \sqrt{x} - \frac{7}{\sqrt{x}-2} = \frac{5}{x}.$$

$$\text{उत्तर. } x = 9, \text{ किंवा } 16.$$

$$१०२. x^2\sqrt{x} + 2x^3 + 35x\sqrt{x} + 34 = \frac{193}{x\sqrt{x}}$$

$$\text{उत्तर. } x = 9.$$

ज्यांत दोन किंवा त्यांहून अधिक अव्यक्त पदे आहेत

अशीं वर्गसमीकरणे.

उदाहरणे.

$$१. \begin{cases} x+y=10 \dots (१). \\ xy=16 \dots (२). \end{cases} \begin{cases} (१) \text{ त्याचा वर्ग कर, आणि} \\ (२) \text{ त्यास नेहमी नीयून.} \end{cases}$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{क्ष}^2 + २ \text{क्षय} + \text{य}^2 = १०० \\ ४ \text{क्षय} = ६४ \end{array} \right\} \text{वजाबाकी कर}$$

$$\text{क्ष}^2 - २ \text{क्षय} + \text{य}^2 = ३६, \text{वर्गमूळकाढ}$$

$$\text{क्ष} - \text{य} = \pm ६ \mid \text{ह्याची बेरीज आणि}$$

$$(१) \quad \text{क्ष} + \text{य} = १० \mid \text{वजाबाकी घे}$$

$$२ \text{क्ष} = १६, \text{किंवा } ४; \therefore \text{क्ष} = ८, \text{किंवा}$$

$$२ \text{य} = ४, \text{किंवा } १६; \therefore \text{य} = २, \text{किंवा}$$

ज्यावेळेस दोन अव्यक्तपदांचा गुणाकार ,  
आणि बेरीज ही दिली आहेत त्यावेळेस ह्यारीतीची  
योजना करावी.

$$\text{क्ष} - \text{य} = ३ \dots (१) \mid (१), \text{ह्याचा वर्ग कर, आणि}$$

$$२. \quad \text{क्षय} = १० \dots (२) \mid (२) \text{ ह्यास चौदावीं गुण}$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{क्ष}^2 - २ \text{क्षय} + \text{य}^2 = ९ \\ ४ \text{क्षय} = ४० \end{array} \right\} \text{बेरीज घे}$$

$$\text{क्ष}^2 + २ \text{क्षय} + \text{य}^2 = ४९, \text{वर्गमूळकाढ}$$

$$\text{क्ष} + \text{य} = \pm ७ \mid$$

$$(१) \quad \text{क्ष} - \text{य} = ३ \mid \text{बेरीज कर, आणि वजाबाकी कर}$$

$$२१५ = १०, किंवा -४; \therefore १५ = ५, किंवा -२.$$

$$२५ = ४, किंवा -१०; \therefore ५ = २, किंवा -५.$$

ज्यावेळेस दोन अव्यक्त पदांचा गुणाकार आणि वजाबाकी हीं दिलीं आहेत त्यावेळेस द्वारीतीची योजना करावी.

$$\left. \begin{aligned} १५^२ + ५^२ &= २०२ \dots (१) \\ १५ + ५ &= २० \dots (२) \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} (१) \text{ ह्याची दुप्पट कर,} \\ \text{आणि (२) ह्याचा वर्ग कर.} \end{array}$$

$$\left. \begin{aligned} २१५^२ + २५^२ &= ४०४ \\ १५^२ + २१५ + ५^२ &= ४०० \end{aligned} \right\} \text{ वजाबाकी घे.}$$

$$१५^२ - २१५ + ५^२ = ४, \text{ वर्गमूळ काढ.}$$

$$१५ - ५ = \pm २ \mid \therefore १५ = ११, किंवा ९.$$

$$(२) \quad १५ + ५ = २० \mid \quad ५ = ९, किंवा ११.$$

ज्यावेळेस दोन अव्यक्त पदांची बेरीज, आणि त्याच्या वर्गांची बेरीज हीं दिलीं आहेत त्यावेळेस द्वारीतीची योजना करावी.

$$\left. \begin{aligned} १५^२ + ५^२ &= ३९४ \dots (१) \\ १५ - ५ &= २ \dots (२) \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} (१) \text{ ह्याची दुप्पट कर,} \\ \text{आणि (२) ह्याचा वर्ग कर.} \end{array}$$

$$\left. \begin{aligned} २१५^२ + २५^२ &= ७८८ \\ १५^२ - २१५ + ५^२ &= ४ \end{aligned} \right\} \text{ वजाबाकी कर.}$$

$$क्ष^१ + २क्षय + य^१ = ७८४$$

$$\therefore \left. \begin{array}{l} क्ष + य = \pm २८ \\ क्ष - य = २ \end{array} \right\} \therefore \left. \begin{array}{l} क्ष = १९, \text{ किंवा } -१७. \\ य = १७, \text{ किंवा } -१९. \end{array} \right.$$

जेव्हां दोन अव्यक्तपदांची वजाबाकी व त्यांच्या वर्गांची बेरीज हां दिलीं आहेत तेव्हां घातीची योजना करावी.

$$\begin{array}{l} ५. \quad \left. \begin{array}{l} क्ष^२ + य^२ = ४०७ \dots (१) \\ क्ष + य = ११ \dots (२) \end{array} \right\} \begin{array}{l} (१) \text{ घात } (२) \text{ घाती भाग आणि } (२) \text{ घात वर्ग कर.} \end{array} \\ \left. \begin{array}{l} क्ष^२ - क्षय + य^२ = ३७ \\ क्ष^२ + २क्षय + य^२ = १२१ \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{वरील समीकरणे खालचे} \\ \text{समीकरणातून वजा कर} \end{array} \end{array}$$

$$३क्षय = ८४, \therefore क्षय = २८$$

$$\left. \begin{array}{l} क्ष^२ - क्षय + य^२ = ३७ \\ क्षय = २८ \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{वरील समीकरणांतून} \\ \text{लवें समीकरण वजा कर} \end{array}$$

$$क्ष^२ - २क्षय + य^२ = ९, \text{ वर्गसूत्र काढ.}$$

$$क्ष - य = \pm ३ \left\{ \therefore \left. \begin{array}{l} क्ष = ७, \text{ किंवा } ४. \\ क्ष + य = ११ \end{array} \right\} \right.$$

$$य = ४, \text{ किंवा } ७.$$

$$क्ष^२ + य^२ = अ, क्ष + य = ब, \text{ अथवा } क्ष^२ - य^२ =$$

अ, क्ष - य = ब, ज्यांत न हा विषम घात प्रकाशक आहे  
अथवा असल्या जातीचीं समीकरणें दिलीं असल्यास

तीं बरल्या उदाहरणाप्रमाणें पहिल्यास दुसऱ्यानें भागून  
मोडवावीं.

$$\left. \begin{array}{l} \text{क्ष} + \text{य} = ३३७ \dots (१) \\ \text{क्ष} + \text{य} = ७ \dots (२) \end{array} \right\} (२) \text{ ह्याचा चतुर्घात कर.}$$

$$(१) \left. \begin{array}{l} \text{क्ष} + ४ \text{क्षय} + ६ \text{क्षय}^२ + ४ \text{क्षय}^३ + \text{य} = २४०१ \\ \text{क्ष} + \text{य} = ३३७ \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{ह्यांची व-} \\ \text{जाबाकी कर.} \end{array}$$

$$४ \text{क्षय} + ६ \text{क्षय}^२ + ४ \text{क्षय}^३ = २०६४, ४ \text{क्षय ह्यांनीं भाग,}$$

$$\text{क्ष} + \frac{२}{३} \text{क्षय} + \text{य} = \frac{५१६}{\text{क्षय}}, (२) \text{ ह्याचा वर्ग कर.}$$

$$\text{क्ष} + २ \text{क्षय} + \text{य} = ४०, \text{ व जाबाकी घे.}$$

$$\therefore \frac{२}{३} \text{क्षय} = ४० - \frac{५१६}{\text{क्षय}},$$

ह्यास २क्षय ह्यांनीं गुणून स्थळांतर कर.

$$\text{क्षय}^२ - १०८ \text{क्षय} = -१०३२, \text{ वर्ग पूर्ण कर.}$$

$$\text{क्षय}^२ - १०८ \text{क्षय} + ४९०१ = -१०३२ + २४०१ = १३६९,$$

$$\text{क्षय} - ४९ = \pm ३७;$$

$$\therefore \text{क्षय} = ४९ \pm ३७ = ८६, \text{ किंवा } १२.$$

क्षय = १२, आणि क्ष + य = ७, हीं समीकरणें घेऊन प-

हिल्या उदाहरणाप्रमाणें पुढें कृति कर, म्हणजे क्ष = ३, किंवा

४; आणि य = ४, किंवा ३, येतील.



$$७. \quad x^3 + y^3 + x + y = १२२ \dots (१)$$

$$\sqrt{x+y} = २० \dots (२)$$

$$x+y = ४००$$

$$२x+y = ८००,$$

हैं पहिल्या समीकरणान मिळवल्यानिं,

$$x^3 + २x+y + y^3 + x + y = १७२२, \text{ र्ग पुनः कर}$$

$$(x+y)^3 + (x+y) + \frac{1}{2} = १७२२ + \frac{1}{2} = \frac{३४४५}{२},$$

$$x+y + \frac{1}{2} = \pm \frac{\sqrt{३४४५}}{2},$$

$$\therefore x+y = \pm \frac{\sqrt{३४४५}-१}{२} = \frac{\sqrt{३४४५}}{२} \text{ किंवा } -\frac{\sqrt{३४४५}}{२} - २५ \text{ किंवा } ४००$$

आणि  $\therefore x+y = ४००$   $\therefore$  पहिल्या उदाहरणाप्रमाणे पुढे

कृति केली, म्हणजे  $x = २५$ , आणि  $y = ३७५$  येतात

$$x^3 + ३y + x = ७५० = २x+y$$

८.

$$x^3 + y^3 - y = २४ \dots (१)$$

$$x^3 + २x+y + x + ३y = ७५ \dots (२)$$

$$y^3 + x - y = २४ \dots (३) \text{ बेरीजेंथे}$$

$$x^3 + २x+y + y^3 + २x+y = १००,$$

$$(x+y)^3 + २(x+y) = १००, \text{ र्ग पुनः कर}$$

$$(x+y)^3 + २(x+y) + १ = १००,$$

$$x+y + १ = \pm १०.$$

∴ क्ष = ९ - य ; ही किंमत (३) द्यांत मांड .

$$य^१ + ९ - य - य = २४, य^२ - २य = १५,$$

$$य^२ - २य + १ = १६, य - १ = \pm ४ ;$$

$$\therefore य = १ \pm ४ = ५, किंवा -३ ;$$

आणि क्ष = ९ - य = ४, किंवा १२ .

$$क्ष^२ - य^२ = क्षय \dots (१) \quad \left. \begin{array}{l} (१) \text{ ह्यास (क्ष+य)} \\ (२) \text{ ह्यांनी गूण.} \end{array} \right\}$$

$$क्ष^२ + य^२ = क्ष-य^२ \dots (२)$$

$$\left. \begin{array}{l} क्ष^२ + क्षय - क्षय^२ - य^२ = क्षय(क्ष+य) \\ क्ष^२ - य^२ = क्ष+य^२ \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{बजावा-} \\ \text{कीकर.} \end{array}$$

$$क्षय - क्षय^२ = क्षय + क्षय^२ - क्षय^२ - य^२,$$

$$\therefore क्ष+य^२ = २क्षय^२$$

$$(१) क्ष-य^२ = क्षय \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{बेगीजकर.} \end{array} \right.$$

$$२क्ष^२ = २क्षय^२ + क्षय, २क्ष ह्यांनीभाग.$$

$$क्ष = य^२ + \frac{य}{२} \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{ह्या क्ष आणि क्ष^२ ह्या-} \\ \text{न्या किंमती (१) द्यांत ठेव.} \end{array} \right.$$

$$क्ष^२ = य^२ + य^२ + \frac{य^२}{४}$$

$$य^२ + य^२ + \frac{य^२}{४} - य^२ = य^२ + \frac{य^२}{२},$$

$$य^२ = य^२ + \frac{य^२}{२} - \frac{य^२}{४};$$

$$y = \frac{xy^2}{x}, y^2 = \frac{x}{4}, \therefore y = \pm \frac{\sqrt{x}}{2};$$

$$\text{आणि } x = \frac{x}{4} + \frac{\sqrt{x}}{4} = \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)}{4}.$$

$$90. \quad x + \sqrt{xy} = 4 \sqrt{y+2} \quad (1)$$

$$x + x = \sqrt{12x + 48y} \quad (2)$$

$$(2) \quad x + x = \sqrt{48(y+2)},$$

$$x + x = x \sqrt{y+2}$$

$$(1) \quad x + x\sqrt{y+2} = x \sqrt{y+2} \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{वजाबाकी कर.} \end{array} \right.$$

$$x + x\sqrt{y+2} - x\sqrt{y+2} = 0.$$

$$\therefore x\sqrt{y+2} = x - x, \therefore \sqrt{y+2} = \frac{x-2}{x},$$

$$\therefore y = \frac{(x-2)^2}{x}, \therefore 48y = \frac{48(x-2)^2}{x}, \quad (2) \text{ व्याख्या कर}$$

$$48 + 48x + x^2 = 48y + 96,$$

$$x^2 + 48x + 48 - 96 = \frac{48(x-2)^2}{x},$$

$$x^2 + 48x - 48 = 48x - 48x + 48,$$

$$x^2 = 48, \therefore x = 4;$$

$$\text{आणि } y = \frac{(4-2)^2}{4} = \frac{2^2}{4} = \frac{4}{4} = 1.$$

$$99 \quad \left. \begin{aligned} \text{क्ष} &= 3\text{क्ष} + 2\text{य} \\ \text{य} &= 3\text{य} + 2\text{क्ष} \end{aligned} \right\} \text{ह्यांची बेराज आणि वजाबाकी कर.}$$

$$\text{क्ष} + \text{य} = 4(\text{क्ष} + \text{य}) \quad (1)$$

$$\text{क्ष} - \text{य} = \text{क्ष} - \text{य} \quad (2)$$

$$(1) \quad (\text{क्ष} + \text{य}) (\text{क्ष} - \text{य}) = \text{क्ष} - \text{य}, \quad \text{क्ष} - \text{य हा नेम भाग} \\ (\text{क्ष} + \text{य}) (\text{क्ष} + \text{य}) = 1 \quad (3), \quad \therefore \text{क्ष} + \text{य} = \frac{1}{\text{क्ष} + \text{य}}$$

$$(1), \text{क्ष} + \text{य} = \frac{1}{\text{क्ष} + \text{य}}, \quad (\text{क्ष} + \text{य}) (\text{क्ष} - \text{य}) = 1 \quad (4)$$

१) ह्याचा वर्ग कर आणि त्यास १४, ह्याने भाग

$$\frac{(\text{क्ष} + \text{य})^2}{(\text{क्ष} - \text{य}) (\text{क्ष} + \text{य})} = \frac{1}{1},$$

$$\frac{(\text{क्ष} + \text{य}) (\text{क्ष} + \text{य})}{\text{क्ष} - \text{य}} = \frac{1}{1},$$

$$\text{अथवा, } \frac{\text{क्ष}^2 + \text{क्षय} + \text{य}^2 + 2\text{क्षय} + 2\text{क्षय}}{\text{क्ष} - \text{य}} = \frac{1}{1},$$

ह्या समीकरणाचे उद् सोडवून त्यास ४क्ष + ५य

ह्याने भाग त्याने

$$\frac{\text{क्ष}^2}{\text{य}^2} + \frac{1}{2} + \frac{\text{य}^2}{\text{क्ष}^2} + \frac{4}{2} \cdot \frac{\text{क्ष}}{\text{य}} + \frac{5}{2} \cdot \frac{\text{य}}{\text{क्ष}} = 0, \frac{1}{2} \text{ वजा कर,}$$

$$\frac{x^2}{y^2} + 2 + \frac{y^2}{x^2} + \frac{4}{2} \left( \frac{x}{y} + \frac{y}{x} \right) = -\frac{1}{2},$$

$$\text{अथवा } \left( \frac{x}{y} + \frac{y}{x} \right)^2 + \frac{4}{2} \left( \frac{x}{y} + \frac{y}{x} \right) = -\frac{1}{2};$$

वर्ग पुनर्केल्याने, आणि वर्गमूळ काढल्याने,

$$\frac{x}{y} + \frac{y}{x} = \frac{-4 \pm \sqrt{16}}{2} = \frac{x}{y} \text{ ह्याने गुणन स्थलांतर कर}$$

$$\frac{x^2}{y^2} + \frac{4 \pm \sqrt{16}}{2} \cdot \frac{x}{y} = -\frac{1}{2} \text{ वर्ग पुनर्कमून मूळ काढ}$$

$$\frac{x}{y} = \frac{-4 \pm \sqrt{16} + \sqrt{-22 \pm 40 \sqrt{16}}}{2}$$

$$(2) \quad (x^2 + y^2), (x + y), (x - y), - (x - y), = 0$$

$$\{(x^2 + y^2), (x + y), y\} (x - y), = 0,$$

$$\therefore x - y = 0, \therefore x = y$$

हे उदाहरण सोडवितांना शेवटी असं दिसून येतं कीं जो गुणक समीकरणांतील सर्व पदांस साधारण आहे त्याची किंमत ० आहे.

$$\text{तुन: } x^2 = 3x + 2x = 5x, \therefore x^2 = 5, \therefore x = \sqrt{5}.$$

ज्या समीकरणांतील प्रत्येक पदांत अव्यक्त पदांच्या धातुप्रकाशाकांची बेरीज एकसारखीच आहे

त्या समीकरणांस सजातीयसमीकरणें म्हणतात.  
 आणि तीं समीकरणां सोडविण्यास जर सुगम रीति सां-  
 पडत नाही, तर त्यातील एक अव्यक्त पद, दुसऱ्या  
 अव्यक्त पदास एकाद्या अव्यक्त गुणकारनें गुणून, त्याब-  
 रोबर धरून तीं समीकरणां सोडवावीं. ही रीति खालच्या  
 उदाहरणांत दाखविली आहे.

$$\text{क्ष} + \text{य} = १४, \quad \text{क्ष} = \text{वय घे, तर } \text{क्ष} = \text{वय}^2,$$

$$92. \quad \text{क्ष}^2 - १४\text{व} = १० \quad \text{आणि, वय} = \text{वय}^2,$$

$$\therefore \text{वय}^2 + \text{य} = १४, \quad (\text{वय} + १)\text{य} = १४, \quad \therefore \text{य} = \frac{१४}{\text{वय} + १},$$

$$\text{वय}^2 - \text{वय} = १०, \quad (\text{वय} - \text{वय})\text{य} = १०, \quad \therefore \text{य} = \frac{१०}{\text{वय} - \text{वय}}.$$

$$\therefore \frac{१४}{\text{वय} + १} = \frac{१०}{\text{वय} - \text{वय}}, \text{ अथवा, } \frac{१४}{\text{वय} + १} = \frac{५}{\text{वय} - \text{वय}},$$

$$१४\text{वय} - १०\text{वय} = ५\text{वय} + ५, \quad १२\text{वय} - १०\text{वय} = ५.$$

$$\therefore \text{वय} - \frac{५}{१२} \text{ वय} = \frac{५}{१२}, \text{ आणि हे वर्गसमीकरण सोडविण्यानें, वय} = \frac{५}{३}.$$

$$\therefore \text{य} = \frac{१०}{\text{वय} - \text{वय}} = \frac{१०}{\frac{५}{३} - \frac{५}{३}} = \frac{१०}{\frac{५}{३} - \frac{५}{३}} = \frac{१०}{१} = १,$$

$$\therefore \text{य} = १, \text{ आणि } \text{क्ष} = \text{वय} = \frac{५}{३} \times १ = १.$$

$$\begin{aligned}
 & \text{क्ष}^2 + \text{क्षय} + \text{य}^2 = 39 \dots (\text{अ}) \\
 १७. & \left. \begin{aligned}
 & \text{क्ष}^2 + \text{क्षज्ञ} + \text{ज्ञ}^2 = २८ \dots (\text{ब}) \\
 & \text{य}^2 + \text{यज्ञ} + \text{ज्ञ}^2 = १९ \dots (\text{क})
 \end{aligned} \right\} \begin{aligned}
 & \text{हैं उदाहरण पाठीमा} \\
 & \text{गचेरीतीनें मूढेळ,} \\
 & \text{पण आपण हें दुस-} \\
 & \text{रेरीतीनें मोडवूं.}
 \end{aligned}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{अ-ब, } & \text{य}^2 - \text{ज्ञ}^2 + (\text{य} - \text{ज्ञ}) \text{क्ष} = ० \\
 \text{ब-क, } & \text{क्ष}^2 - \text{य}^2 + (\text{क्ष} - \text{य}) \text{ज्ञ} = ९
 \end{aligned}
 \left. \vphantom{\begin{aligned} \text{अ-ब, } \\ \text{ब-क, } \end{aligned}} \right\} \text{अथवा,}$$

$$\begin{aligned}
 \text{क्ष} + \text{य} + \text{ज्ञ} &= \frac{\text{०}}{\text{य} - \text{ज्ञ}} \\
 \text{क्ष} + \text{य} + \text{ज्ञ} &= \frac{\text{९}}{\text{क्ष} - \text{य}}
 \end{aligned}
 \left. \vphantom{\begin{aligned} \text{क्ष} + \text{य} + \text{ज्ञ} \\ \text{क्ष} + \text{य} + \text{ज्ञ} \end{aligned}} \right\} (\text{ड})$$

$$\therefore \frac{\text{९}}{\text{य} - \text{ज्ञ}} = \frac{\text{९}}{\text{क्ष} - \text{य}}, \text{ अथवा } \text{य} - \text{ज्ञ} = \text{क्ष} - \text{य},$$

$$\therefore \text{क्ष} + \text{ज्ञ} = २\text{य}, \text{ हा किंमत (ड) घात मांड.}$$

$$३\text{य} = \frac{\text{०}}{\text{य} - \text{ज्ञ}}, \quad \text{य} = \frac{\text{३}}{\text{य} - \text{ज्ञ}}, \quad \text{य}^2 - \text{यज्ञ} = ३,$$

$$\text{यज्ञ} = \text{य}^2 - ३, \therefore \text{ज्ञ} = \frac{\text{य}^2 - ३}{\text{य}} \quad \left| \begin{array}{l} \text{हा किं-} \\ \text{मतीक,} \end{array} \right.$$

$$\text{ज्ञ}^2 = \frac{\text{य}^2 - ६\text{य}^2 + ९}{\text{य}^2} \quad \left| \begin{array}{l} \text{घात मांड.} \end{array} \right.$$

$$\text{य}^2 + \text{य}^2 - ३ + \frac{\text{य}^2 - ६\text{य}^2 + ९}{\text{य}^2} = १९,$$

$$२\text{य}^2 + \frac{\text{य}^2 - ६\text{य}^2 + ९}{\text{य}^2} = २२,$$

$$२य^{-१} + य^{-१} - ६य^३ + ९ = २२य^३,$$

$$३य^{-१} - २०य^३ = -९, \quad य^{-१} - \frac{२०}{३}य^३ = -३,$$

$$य^{-१} - \frac{२०}{३}य^३ + \frac{१४}{३} = -३ + \frac{१९६}{९} = \frac{१९६}{९} - \frac{३७}{९} = \frac{१५९}{९},$$

$$य^३ - \frac{१४}{३} = \pm \frac{१३}{३}, \quad य^३ = \frac{१४ \pm १३}{३} = ९,$$

$$\therefore य = \pm ३, \quad \therefore ज्ञ = य - \frac{३}{य} = \pm ३ - \frac{३}{\pm ३} = \pm २,$$

$$\text{आणि क्ष} = २य - ज्ञ = \pm ६ \mp २ = \pm ४.$$

### उदाहरणें.

$$१. \quad \left. \begin{array}{l} क्ष^३ + य^३ = २०. \\ क्ष^३ - य^३ = १२. \end{array} \right\} \quad \text{उत्तर.} \quad \left\{ \begin{array}{l} क्ष = ४. \\ य = २. \end{array} \right.$$

$$२. \quad \left\{ \begin{array}{l} क्ष + य = ६. \\ क्ष^३ + य^३ = २६. \end{array} \right. \quad \text{उत्तर.} \quad \left\{ \begin{array}{l} क्ष = १. \\ य = १. \end{array} \right.$$

$$३. \quad \left\{ \begin{array}{l} क्ष^३ + य^३ = १०. \\ क्ष - य = २. \end{array} \right. \quad \text{उत्तर.} \quad \left\{ \begin{array}{l} क्ष = ३. \\ य = १. \end{array} \right.$$

$$४. \quad \left\{ \begin{array}{l} क्ष^३ + य^३ = २९. \\ क्ष + य = १. \end{array} \right. \quad \text{उत्तर.} \quad \left\{ \begin{array}{l} क्ष = ४, किंवा -३ \\ य = -३, किंवा ४. \end{array} \right.$$



५.  $\begin{cases} \text{क्ष}^3 - \text{य}^3 = १६. \\ \text{क्ष} + \text{य} = ८. \end{cases}$  उत्तर.  $\begin{cases} \text{क्ष} = ५. \\ \text{य} = ३. \end{cases}$
६.  $\begin{cases} \text{क्ष} - \text{य} = १. \\ \text{क्ष}^3 - \text{य}^3 = १९. \end{cases}$  उत्तर.  $\begin{cases} \text{क्ष} = ३, \text{किंवा} -२. \\ \text{य} = २, \text{किंवा} -३. \end{cases}$
७.  $\begin{cases} \text{क्ष}^3 + \text{य}^3 = १८९. \\ \text{क्ष}^2\text{य} + \text{क्षय}^2 = १८९. \end{cases}$  उ.  $\begin{cases} \text{क्ष} = ५, \text{किंवा} ४. \\ \text{य} = ४, \text{किंवा} ५. \end{cases}$
८.  $\begin{cases} १०\text{क्ष} + \text{य} = ३\text{क्षय}. \\ \text{य} - \text{क्ष} = २. \end{cases}$  उत्तर  $\begin{cases} \text{क्ष} = २, \text{किंवा} -\frac{१}{२}. \\ \text{य} = ४, \text{किंवा} \frac{५}{२}. \end{cases}$
९.  $\begin{cases} \text{क्ष}^3 + \text{य}^3 + \text{क्ष} + \text{य} = १८. \\ २\text{क्षय} = १२. \end{cases}$  उ.  $\begin{cases} \text{क्ष} = ३, २, -३ \pm \sqrt{३}. \\ \text{य} = २, ३, -३ \pm \sqrt{३}. \end{cases}$
१०.  $\begin{cases} \text{क्ष}^2\text{य} + \text{य}^3 = १०. \\ \text{क्षय}^2 + \text{य} = ५. \end{cases}$  उत्तर.  $\begin{cases} \text{क्ष} = ३. \\ \text{य} = १. \end{cases}$
११.  $\begin{cases} \frac{\text{क्ष} + \text{य}}{\text{क्ष} - \text{य}} = \text{अ}^2. \\ \text{क्ष}^3 - \text{य}^3 = \text{ब}^3. \end{cases}$  उत्तर.  $\begin{cases} \text{क्ष} = \frac{\text{ब}}{\text{अ}}(\text{अ}+१). \\ \text{य} = \frac{\text{ब}}{\text{अ}}(\text{अ}-१). \end{cases}$
१२.  $\begin{cases} ९\text{क्ष}^3 = ४\text{य}^3. \\ ३\text{क्षय} + २\text{क्ष} + \text{य} = ४८५. \end{cases}$  उ.  $\begin{cases} \text{क्ष} = १०, -१०\frac{१}{२}. \\ \text{य} = १५, -१५\frac{१}{२}. \end{cases}$
१३.  $\begin{cases} \text{क्ष}^3 + \text{य}^3 - \text{क्ष} - \text{य} = ७८. \\ \text{क्षय} + \text{क्ष} + \text{य} = ३९. \end{cases}$

$$\text{उत्तर. } \begin{cases} \text{क्ष} = \frac{-13 \pm \sqrt{-33}}{2}, & \text{९, किंवा ३.} \\ \text{य} = \frac{-13 \mp \sqrt{-33}}{2}, & \text{३, किंवा ९.} \end{cases}$$

$$१४. \left. \begin{aligned} \frac{१}{\text{य}} - \frac{१}{\text{क्ष}} &= \frac{१}{४} \\ \text{क्ष}^२\text{य} - \text{क्षय}^२ &= १६. \end{aligned} \right\} \text{उ. } \begin{cases} \text{क्ष} = ४, \text{किंवा } -२. \\ \text{य} = २, \text{किंवा } -४. \end{cases}$$

$$१५. \left. \begin{aligned} \text{क्ष}^१ + \text{क्षय} &= \text{अ}^१ + \text{अब.} \\ \text{य}^१ + \text{यक्ष} &= \text{ब}^१ + \text{अब.} \end{aligned} \right\} \text{उ. } \begin{cases} \text{क्ष} = \text{अ.} \\ \text{य} = \text{ब.} \end{cases}$$

$$१६. \left. \begin{aligned} १२ \text{क्षय} &= ५ \text{क्ष} + १२ \text{य.} \\ \text{य}^२ - \text{क्ष}^२ &= १. \end{aligned} \right\} \text{उ. } \begin{cases} \text{क्ष} = १\frac{१}{३}. \\ \text{य} = १\frac{२}{३}. \end{cases}$$

$$१७. \left. \begin{aligned} २ \text{य} + ३ \text{क्ष} &= ८. \\ ३ \text{य}^२ + २ \text{क्ष}^२ &= ११. \end{aligned} \right\} \text{उ. } \begin{cases} \text{क्ष} = २, \text{किंवा } २\frac{४}{३९}. \\ \text{य} = १, \text{किंवा } \frac{३९}{३९}. \end{cases}$$

$$१८. \left. \begin{aligned} \text{य} - \text{क्ष} &= २. \\ ३ \text{क्षय} &= १० \text{क्ष} + \text{य.} \end{aligned} \right\} \text{उ. } \begin{cases} \text{क्ष} = २, \text{किंवा } -\frac{१}{३}. \\ \text{य} = ४, \text{किंवा } १\frac{२}{३}. \end{cases}$$

$$१९. \left. \begin{aligned} \text{क्ष} + \text{य} + \sqrt{\text{क्ष} + \text{य}} &= १२. \\ \text{क्ष}^२ + \text{य}^२ &= १८९. \end{aligned} \right\} \text{उ. } \begin{cases} \text{क्ष} = ९, \text{किंवा } ४. \\ \text{य} = ४, \text{किंवा } ९. \end{cases}$$

$$२०. \left. \begin{aligned} ४ \text{क्षय} &= ९६ - \text{क्ष}^२\text{य}^२. \\ \text{क्ष} + \text{य} &= ६. \end{aligned} \right\} \text{उ. } \begin{cases} \text{क्ष} = ४, २, ३ \pm \sqrt{३}. \\ \text{य} = २, ४, ३ \mp \sqrt{३}. \end{cases}$$

$$29. \left. \begin{aligned} \frac{x^2+y^2}{xy} &= \frac{13}{6} \\ x^2y+xy^2 &= x^2y+42 \end{aligned} \right\} \text{उ०} \begin{cases} x=3. \\ y=2. \end{cases}$$

$$22. \left. \begin{aligned} x^2+y^2+4x-6y &= 13 \\ xy-3x+2y &= 11 \end{aligned} \right\} \text{उ०} \begin{cases} x=3, -9, -3, -13 \\ y=4, 5, -2, 2. \end{cases}$$

$$23. \left. \begin{aligned} (x^2+y^2)xy^2 &= 3600 \\ x^2y+xy^2 &= 64 \end{aligned} \right\} \text{उ०} \begin{cases} x=3, 4 \\ y=4, 3. \end{cases}$$

$$24. \left. \begin{aligned} x+y &= 26.47 \\ x+y &= 99 \end{aligned} \right\} \text{उ०} \begin{cases} x=17, \text{किंवा } 4. \\ y=8, \text{किंवा } 19. \end{cases}$$

$$25. \left. \begin{aligned} 2x+2y-x^2-y^2+2 &= 0 \\ xy &= 3 \end{aligned} \right\}$$

$$\text{उ०} \begin{cases} x=3, 9, \text{किंवा } -(9 \pm \sqrt{2}) \\ y=9, 3, \text{किंवा } -(9 \mp \sqrt{2}). \end{cases}$$

$$26. \left. \begin{aligned} x^2+y^2 &= 69 \\ x^2-xy &= 6 \end{aligned} \right\} \text{उत्तर} \begin{cases} x=6 \\ y=9 \end{cases}$$

$$27. \left. \begin{aligned} x+y &= 10 \\ x^2+y^2 &= 100 \end{aligned} \right\} \text{उ०} \begin{cases} x=7, \text{किंवा } 3 \\ y=3, \text{किंवा } 7 \end{cases}$$

$$28. \left. \begin{aligned} x^2+xy+y^2 &= 29 \\ x^2-xy+y^2 &= 3 \end{aligned} \right\} \text{उ०} \begin{cases} x=1 \\ y=4 \end{cases}$$

$$29. \left. \begin{aligned} x^2 + y^2 + 12xy &= 9x^2 + 4y^2 \\ x^2 + 4x + y^2 &= 4y + 24. \end{aligned} \right\} \text{उ०} \begin{cases} x=4, -3. \\ y=2, 9. \end{cases}$$

$$30. \left. \begin{aligned} x-y &= 2. \\ x+y &= 202. \end{aligned} \right\} \text{उ०} \begin{cases} x=4, -2, \sqrt{-95}+9. \\ y=2, -4, \sqrt{-95}-9. \end{cases}$$

$$31. \left. \begin{aligned} x^2 + 2xy + y + 3x &= 03. \\ y^2 + x + 3y &= 47 \end{aligned} \right\} \text{उ०} \begin{cases} x=4, 96. \\ y=9, -7. \end{cases}$$

$$32. \left. \begin{aligned} (x^2 + y^2) \cdot (x+y) &= 920. \\ (x-y) \cdot (x^2 - y^2) &= 24. \end{aligned} \right\} \text{उ०} \begin{cases} x=4. \\ y=9. \end{cases}$$

$$33. \left. \begin{aligned} xy &= 6. \\ 3x^2 - 7y^2 + 1 &= 0. \end{aligned} \right\} \text{उत्तर.} \begin{cases} x = \pm 3. \\ y = \pm 2. \end{cases}$$

$$34. \left. \begin{aligned} 2x^2 - y^2 &= 1 + x^2 - y^2 \\ x-y &= \sqrt{x^2 - x + y} - \sqrt{x + x - y} \end{aligned} \right\} \text{उ०} \begin{cases} x=9. \\ y=9. \end{cases}$$

$$35. \left. \begin{aligned} x-y &= 3. \\ x^2 + y^2 &= 99(x+y) \end{aligned} \right\} \text{उ०} \begin{cases} x=9, -2. \\ y=2, -9. \end{cases}$$

$$36. \left. \begin{aligned} x-2\sqrt{xy} + y - \sqrt{x} + \sqrt{y} &= 0. \\ \sqrt{x} + \sqrt{y} &= 9. \end{aligned} \right\}$$

उत्तर.  $x=9$ , किंवा  $\frac{9}{4}$ ;  $y=4$ , किंवा  $\frac{9}{4}$

$$37. \left. \begin{aligned} \frac{x^3}{y^2} + \frac{4xy}{y} &= 9\frac{4}{5} \\ x-y &= 2 \end{aligned} \right\} \text{ उत्तर. } \begin{cases} x=9. \\ y=7. \end{cases}$$

$$38. \left. \begin{aligned} x^3 - 2x^2y + y^3 &= 19. \\ x^3 - 2x^2y + y^3 - x^3 + y^3 &= 20 \end{aligned} \right\}$$

$$\text{उत्तर. } \begin{cases} x = \pm 3, \text{ किंवा } \pm \sqrt{6}. \\ y = 2, \text{ किंवा } -1. \end{cases}$$

$$39. \left. \begin{aligned} x^3 + y^3 &= 3. \\ x^2y &= 2. \end{aligned} \right\} \text{ उ० } \begin{cases} x = \sqrt[3]{\frac{1}{2}(\sqrt{1-4\sqrt{2}}+3)} \\ y = \sqrt[3]{\frac{1}{2}(\sqrt{1-4\sqrt{2}}+3)} \end{cases}$$

$$40. \left. \begin{aligned} \frac{x^3}{y^2} + \frac{y^3}{x^2} - \frac{3}{2} \left( \frac{x}{y} + \frac{y}{x} \right) &= 2\frac{3}{5} \\ 4x - 9y &= 10 \end{aligned} \right\}$$

$$\text{उत्तर. } x=9, y=2.$$

$$41. \left. \begin{aligned} x^3 - xy^2 &= 40y. \\ x^2y - y^3 &= 3x. \end{aligned} \right\} \text{ उ० } \begin{cases} x=16, -9\frac{3}{4} \\ y=4, 2\frac{3}{4} \end{cases}$$

$$42. \left. \begin{aligned} x^3 + y^3 - 15(x+y) &= -100 \\ 3x^2y + 31(x+y) &= 290 \end{aligned} \right\} \text{ उ० } \begin{cases} x=2 \\ y=4 \end{cases}$$

$$४३. \left. \begin{aligned} \sqrt{य} : \sqrt{क्ष} &:: \sqrt{क्ष+३} : \sqrt{क्ष+१}. \\ \sqrt{क्षय} + २\sqrt{य} &= ३\sqrt{क्ष} + ३\sqrt{क्ष}. \end{aligned} \right\} \text{उ०} \left\{ \begin{aligned} क्ष &= १. \\ य &= ४. \end{aligned} \right.$$

$$४४. \left. \begin{aligned} \frac{क्ष}{य} - \frac{य}{क्ष} &= \frac{११}{३०}. \\ क्ष + क्षय &= ६६. \end{aligned} \right\} \text{उत्तर.} \left\{ \begin{aligned} क्ष &= ६. \\ य &= ९. \end{aligned} \right.$$

$$४५. \left. \begin{aligned} ३क्ष^३ &= २क्षय + २४. \\ य^३ &= क्षय - ३. \end{aligned} \right\} \text{उत्तर.} \left\{ \begin{aligned} क्ष &= ४. \\ य &= ३. \end{aligned} \right.$$

$$४६. \left. \begin{aligned} क्ष^३ - २क्षय + ३य^३ &= ९. \\ क्ष^३ - ४क्षय + ३य^३ &= ९. \end{aligned} \right\} \text{उ०} \left\{ \begin{aligned} क्ष &= \pm ३, \pm \sqrt[५]{२}. \\ य &= \pm २, \pm \sqrt[५]{२}. \end{aligned} \right.$$

$$४७. \left. \begin{aligned} २क्ष^३ - ३क्षय + य^३ &= ४. \\ क्ष^३ - २क्षय + ३य^३ &= ९. \end{aligned} \right\} \text{उ०} \left\{ \begin{aligned} क्ष &= \pm ३. \\ य &= \pm २. \end{aligned} \right.$$

$$४८. \left. \begin{aligned} क्ष^३ + य^३ &= ३क्ष. \\ क्ष^३ + य^३ &= क्ष. \end{aligned} \right\} \text{उ०} \left\{ \begin{aligned} क्ष &= \{(+२)^३=४\}, \{(-१)^३=१\} \\ य &= ८. \end{aligned} \right.$$

$$४९. \left. \begin{aligned} \sqrt{\frac{३क्ष}{क्ष+य}} + \sqrt{\frac{क्ष+य}{३क्ष}} &= २. \\ क्षय - (क्ष+य) &= ५४. \end{aligned} \right\} \text{उ०} \left\{ \begin{aligned} क्ष &= ६, -२. \\ य &= १२, -९. \end{aligned} \right.$$

$$५०. \left. \begin{aligned} (क्ष+य) &= ३(क्ष-य)^३ \\ (क्ष^३+य^३)(क्ष+य) &= २७. \end{aligned} \right\} \text{उ०} \left\{ \begin{aligned} क्ष &= ३. \\ य &= १. \end{aligned} \right.$$

$$५१. \left. \begin{aligned} \frac{x^3 + xy + y^3}{x^3 - xy + y^3} &= 2\frac{1}{3} \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{y} &= 1\frac{1}{2} \end{aligned} \right\} \text{उ०} \left\{ \begin{aligned} x &= 2, 9. \\ y &= 9, 2. \end{aligned} \right.$$

$$५२. \left. \begin{aligned} 2x^3 - 2xy &= 3y \\ 3xy - 3y^3 &= 2x \end{aligned} \right\} \text{उ०} \left\{ \begin{aligned} x &= 3 \\ y &= 2 \end{aligned} \right.$$

$$५३. \left. \begin{aligned} (x+y)(x-y)^3 &= 32 \\ x^3 - y^3 - x - y &= 0 \end{aligned} \right\} \text{उ०} \left\{ \begin{aligned} x &= 4 \\ y &= 2 \end{aligned} \right.$$

$$५४. \left. \begin{aligned} 4xy^3 - x^3y &= \frac{3}{4} - 4 \\ x^3 - xy(x-y) &= 3 \end{aligned} \right\} \text{उ०} \left\{ \begin{aligned} x &= 1 \\ y &= 2 \end{aligned} \right.$$

$$५५. \left. \begin{aligned} (x+y)^3 - (x-y)^3 &= a \\ (x+y)^2 + (x-y)^2 &= b \end{aligned} \right\}$$

$$\text{उ० } x = \frac{a}{4} + \left\{ \frac{1}{4} \left( b^2 + \frac{a^2}{4} \right) \right\}^{\frac{1}{2}}, y = \frac{a}{4} \left( b^2 + \frac{a^2}{4} \right)^{\frac{1}{2}}.$$

$$५६. \left. \begin{aligned} (x^3 + y^3)(x+y) &= 2xy \\ (x^3 - y^3)(x+y) &= x^3y^3 \end{aligned} \right\} \text{उ०} \left\{ \begin{aligned} x &= \frac{19}{136} \\ y &= \frac{89}{136} \end{aligned} \right.$$

$$५७. \left. \begin{aligned} (x^3 + y^3) \frac{y}{x} &= \frac{25}{3} \\ (x^3 - y^3) \frac{x}{y} &= \frac{9}{2} \end{aligned} \right\} \text{उ०} \left\{ \begin{aligned} x &= 3 \\ y &= 2 \end{aligned} \right.$$

$$\begin{aligned}
 ५८. \quad & \left. \begin{aligned} (x^3+y^3)-(x^3+y^3) &= \frac{53}{24} \\ (x+y)^3 + (x-y)^3 - 2xy &= \frac{31}{24} \\ (x-2)y + x - 2y^2 &= (y-1)\sqrt{xy} \end{aligned} \right\} \text{उ.} \begin{cases} x=2 \\ y=1 \end{cases} \\
 ५९. \quad & \left. \begin{aligned} \frac{\sqrt{xy}-1}{xy-1} &= \frac{1}{4} \end{aligned} \right\}
 \end{aligned}$$

उत्तर.  $x=2$ ,  $y=1$ .

$$\begin{aligned}
 ६०. \quad & \left. \begin{aligned} (x^3-y^3)(x^3-y^3) &= 49x^2y^2 \\ (x^3+y^3)(x+y) &= 14xy \end{aligned} \right\} \text{उ.} \begin{cases} x=4 \\ y=2 \end{cases} \\
 ६१. \quad & \left. \begin{aligned} \sqrt{x+y} + \sqrt{x-y} &= y \\ xy + \sqrt{x^3y^3-y} &= \sqrt{x+y} + \sqrt{x-y} \end{aligned} \right\}
 \end{aligned}$$

उत्तर.  $x=y=2$ .

$$\begin{aligned}
 ६२. \quad & \left. \begin{aligned} \sqrt{y+2} &= x+2 \\ x^3-y^3 &= (y+2)^3 \end{aligned} \right\} \text{उ.} \begin{cases} x=4 \\ y=2 \end{cases} \\
 ६३. \quad & \left. \begin{aligned} x^3-xy+y^3 &= \frac{99}{x^2+y^2} \\ x^3+xy+y^3 &= \frac{133}{x^3-xy+y^3} \end{aligned} \right\} \text{उ.} \begin{cases} x=3 \\ y=2 \end{cases}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 ६४. \quad & \left. \begin{aligned} \sqrt{x^3+3x^2y^2} + \sqrt{y^3+3x^2y^2} &= a \\ x+y+3\sqrt{xy} &= b \end{aligned} \right\}
 \end{aligned}$$



$$\left( x = \frac{1}{2} \right) \left\{ y^2 + \sqrt{2x^3 - y^3} \right\}$$

उत्तर.

$$\left( y = \frac{1}{2} \right) \left\{ x^2 - \sqrt{2x^3 - y^3} \right\}$$

$$65. \quad \begin{cases} x^3 + y^3 = 3xy \\ x^2 + y^2 = 2 \end{cases} \quad \text{उ०} \quad \begin{cases} x = \frac{\sqrt{10}}{2\sqrt{11}} (\sqrt{11} + 1) \\ y = \frac{\sqrt{10}}{2\sqrt{11}} (\sqrt{11} - 1) \end{cases}$$

$$66. \quad \begin{cases} (x+y)^3 = 64(x-y) \\ (x^2+y^2)(x+y) = 76 \end{cases} \quad \text{उ०} \quad \begin{cases} x = \frac{5}{2} \\ y = \frac{3}{2} \end{cases}$$

$$67. \quad \begin{cases} x^2 + y^2 = 1 + 2xy + 3x^2y^2 \\ x^3 + y^3 = 2xy^2 + 2y^2 + x^2 + 9 \end{cases} \quad \text{उ०} \quad \begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases}$$

$$68. \quad \begin{cases} (x^2 + xy + y^2)(x^2 - xy + y^2) = 409 \\ (x^2 + y^2)^3 - (x^2 + y^2)xy = 325 \end{cases}$$

उत्तर.  $x = 3, y = 4$ .

$$69. \quad \begin{cases} x - 2\sqrt{2xy - y^2} = 4\sqrt{xy} \\ x^2 - 4\sqrt{xy} \cdot x = 2xy - 4y^2 \end{cases}$$

उत्तर.  $x = 4, y = 4$ .

$$190. \left. \begin{aligned} x^2 + y^2 &= \frac{9}{13} \\ x + y &= 1 \end{aligned} \right\} \text{ उत्तर. } x=y=\frac{1}{\sqrt{13}}.$$

$$191. \left. \begin{aligned} x^2 - y^2 &= 126 \\ x - y &= 1 \end{aligned} \right\} \text{ उत्तर. } x=2, y=1.$$

$$192. \left. \begin{aligned} x + y + z &= 3 \text{ अ.} \\ x^2 y + x^2 z + y^2 z &= 3 \text{ अ.}^3 \\ x y z &= \text{अ.}^3 \end{aligned} \right\} \text{ उ० } \begin{cases} x = \text{अ.} \\ y = \text{अ.} \\ z = \text{अ.} \end{cases}$$

$$193. \left. \begin{aligned} x y &= x + y. \\ x z &= 2(x + z) \\ y z &= 3(y + z) \end{aligned} \right\} \text{ उत्तर. } \begin{cases} x = 1\frac{1}{2} \\ y = 2\frac{3}{4} \\ z = -12 \end{cases}$$

$$194. \left. \begin{aligned} x^2 + y^2 + z^2 &= 12 \\ x^2 + y &= 3 \\ z^2 + y &= 11 \end{aligned} \right\} \text{ उत्तर. } \begin{cases} x = \pm 1 \\ y = 2 \\ z = \pm 3 \end{cases}$$

$$195. \left. \begin{aligned} x y + z &= 4 \\ x y z &= 8 \\ 2(x^2 - y) &= (y^2 - x)^2 \end{aligned} \right\} \text{ उत्तर. } \begin{cases} x = 2, 1 \\ y = 2, 1 \\ z = 1, 4 \end{cases}$$

$$196. \left. \begin{aligned} x^2 + x y + y^2 &= 13 \\ y^2 + y z + z^2 &= 49 \\ x^2 + x z + z^2 &= 39 \end{aligned} \right\} \text{ उत्तर. } \begin{cases} x = \pm 1 \\ y = \pm 3 \\ z = \pm 5 \end{cases}$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{क्ष}^2 \text{य}^2 \text{ज्ञ}^2 = 100 \\ \text{क्ष}^2 \text{य}^2 \text{ज्ञ}^2 = 100 \\ \text{क्ष}^2 \text{य}^2 \text{ज्ञ}^2 = 100 \end{array} \right\} \text{उत्तर} \left\{ \begin{array}{l} \text{क्ष} = \pm 10 \\ \text{य} = \pm 10 \\ \text{ज्ञ} = \pm 10 \end{array} \right.$$

$$\left. \begin{array}{l} (2\sqrt{\text{क्ष}} + \sqrt{\text{य}})^2 = \text{य}^2 - 4\text{क्ष}\text{ज्ञ} \\ 2\sqrt{\text{क्ष}} + \sqrt{\text{य}} = \frac{\text{य}^2 - 4\text{क्ष}\text{ज्ञ}}{2\sqrt{\text{क्ष}}} \\ 2\sqrt{\text{क्ष}} = \frac{\text{य}^2 - 4\text{क्ष}\text{ज्ञ}}{2\sqrt{\text{क्ष}}} + \text{ज्ञ} \end{array} \right\} \text{उ०} \left\{ \begin{array}{l} \text{क्ष} = 10 \\ \text{य} = 10 \\ \text{ज्ञ} = 10 \end{array} \right.$$

## प्रश्न

१. अ, लंडनाहून यार्कास याबयाकरिता निघाला, आणि त्याचवेळेस ब, यार्काहून लंडनास याबयाकरिता निघाला. त्या दोघांची बाटेंत गांठ पडल्यानंतर अ ९ तासांनी यार्कास पोचला, आणि ब १६ तासांनी लंडनास पोचला; तर अस लंडनाहून यार्कास जावयास किती तास लागले, आणि बस यार्काहून लंडनास जावयास किती तास लागले?

एकेकास त्यांची गांठ पडण्याच्या अगोदर रस्त्यावर जितके तास लागले ते = क्ष पर,

नर क्ष + ९ = अचा सगळा वेळ

आणि क्ष + १६ = बचा .....

$$\frac{\text{क्ष} + ९}{\text{क्ष} + ९} = \frac{\text{क्ष}}{\text{क्ष} + ९} = \left\{ \begin{array}{l} \text{गांठ पडण्याचे पूर्वी अ जि-} \\ \text{तका रस्ता चालून आला तो,} \end{array} \right.$$

$$\frac{\text{क्ष} + १६}{\text{क्ष} + १६} = \frac{\text{क्ष}}{\text{क्ष} + १६} = \left\{ \begin{array}{l} \text{गांठ पडण्याचे पूर्वी ब जि-} \\ \text{तका रस्ता चालून आला तो,} \end{array} \right.$$

$$\text{म्हणून, } \frac{\text{क्ष}}{\text{क्ष} + ९} + \frac{\text{क्ष}}{\text{क्ष} + १६} = १ ;$$

$$\text{क्ष}^३ + १६ \text{क्ष} + \text{क्ष}^३ + ९ \text{क्ष} = \text{क्ष}^३ + २५ \text{क्ष} + १४४ ;$$

$$\therefore \text{क्ष}^३ = १४४, \text{क्ष} = १२,$$

$$\therefore \text{क्ष} + ९ = २१ = \text{अचा वेळ},$$

$$\text{आणि } \text{क्ष} + १६ = २८ = \text{बचा वेळ}.$$

अथवा प्रकारान्तराने; अचा सगळा वेळ = क्ष ये,

आणि बचा ..... = य ..

$$\text{क्ष} : ९ :: १ : \frac{९}{\text{क्ष}} = \text{गांठ पडल्यावर अजितका रस्ता चालून}$$

मेळा तो,

$$\text{य} : १६ :: १ : \frac{१६}{\text{य}} = \text{..... ब .....}$$

$$\text{म्हणून, } \frac{९}{\text{क्ष}} + \frac{१६}{\text{य}} = १, \therefore ९\text{य} + १६\text{क्ष} = \text{क्षय} \bullet$$

परंतु क्ष=य-७, ∴ ही किंमत पहिल्या समीकरणांत मांडल्यानें,

$$९य + १६य - ११२ = य - ७य,$$

$$य - १२य = -११२,$$

$$य - १२य + १६य = २५६ - ११२ = १४४,$$

$$य - १६य = १२, ∴ य = २८ तास = ब चा वेळ;$$

$$\text{आणि क्ष} = य - ७ = २१ \text{ तास} = \text{अ चा} \dots$$

२. अ आणि ब हे दोघे एकाच वेळेस वाट चालू लागले; अ, क कडून ड कडे जावयास निघाला, आणि ब, ड कडून क कडे जावयास निघाला; त्यांची रस्त्यावर गांठ पडली, तेव्हां असें समजून आले कीं, अ, बपेक्षां ३० मैल जास्ती चालला, आणि ते त्याच चालीनें पुढें चालले तर अ, डस चार दिवसांनीं पोहोंचेल, आणि ब, कस ९ दिवसांनीं पोहोंचेल; तर ड आणि क ह्यांच्या मध्ये किती अंतर होतें?

गांठ पडल्याचे पूर्वी अजितकारस्ता चालून आला तो = क्षघे, आणि बजितकारस्ता चालून आला तो = यघे.

$$\text{तर क्ष} = य + ३०.$$

प्रातां यमेल जमीन अचार दिवसांत जातो,  
 $\therefore यः क्ष : : ४ : \frac{४क्ष}{य} =$  ते भेटल्याच्या पूर्वी जित-  
 के दिवस अचालत होता ते .

पुनः क्षमेल जमीन ब नऊ तासांत जातो,  
 $\therefore क्षः य : : ९ : \frac{९य}{क्ष} =$  ते भेटल्याच्या पूर्वी जितके  
 दिवस ब चालत होता ते ,

$$\text{म्हणून } \frac{४क्ष}{य} = \frac{९य}{क्ष} ;$$

$$\therefore ४क्ष^२ = ९य^२, \therefore २क्ष = ३य, \therefore क्ष = \frac{३य}{२},$$

$$\text{म्हणून, } \frac{३य}{२} = य + ३०, \therefore य = ६०, \text{ आणि } क्ष = ९०,$$

$$\therefore क्ष + य = १५० \text{ मेल} = \text{सगळें अंतर} .$$

३. अशा दोन संख्या कोणत्या आहेत, की ज्यांची  
 वजाबाकी २ येईल, आणि ज्यांच्या गुणाकारास ज्यां-  
 च्या बेरजेने गुणिलें असतां गुणाकार १२ येईल.

$$\text{मोठी संख्या} = क्षये, \text{ आणि धाकटी} = य ये .$$

$$\text{तर } क्ष - य = २, \text{ म्हणजे } य = क्ष - २,$$

$$\text{आणि } क्षय(क्ष + य) = १२, \text{ म्हणजे } क्षय + क्षय^२ = १२,$$

$$क्ष(क्ष - २) + क्ष(क्ष - २)^२ = १२,$$

$$क्ष^२ - २क्ष^२ + क्ष^३ - ४क्ष^२ + ४क्ष = १२,$$

$$२१२ - ६१ + ४१ - १ = ०,$$

$$२१२(१-३) + ४(१-३) = ०,$$

$$\therefore १ = ३, \text{ आणि } ४ = १.$$

४. अशा दोन संख्या काढ, की ज्यांच्या बेरजेस त्यांच्याच घनांच्या बेरजेने गुणिले असतां गुणाकार ११२ होईल, आणि त्यांच्या बेरजेचा घन त्यांच्या वजाबाकीस :: ३२ : १ होईल.

मोठी संख्या =  $x$ , आणि धाकटी =  $y$ .

$$\text{तर } (x+y)(x^2+y^2) = ११२,$$

$$\text{आणि } (x+y) : (x-y) :: ३२ : १,$$

$$(x+y) : (x-y) :: ३२ : १, \text{ अथवा}$$

$$x^2 + ४१x + ६१y^2 + ४१x^2 + y^2 = ३२(x-y),$$

$$४१x^2 + ४१x^2 + ४१y^2 + ४१y^2 = ४४८$$

$$४१x^2 - ६१x^2 + ३२y = ४४८ - ३२(x-y)$$

$$४१x^2 - २१x^2 + y + \frac{३२}{३}(x-y) = \frac{४४८}{३},$$

$$(x-y) + \frac{३२}{३}(x-y) + \frac{१६}{३} = \frac{३१६}{३} + \frac{१३४४}{३} = \frac{१६००}{३},$$

$$x-y + \frac{१६}{३} = \frac{४०}{३}, \quad x-y = \frac{३४}{३} = ११,$$

$$\therefore (x+y) = 32 (x-y) = 246,$$

$$x+y = 8, \quad x-y = 2,$$

$$\therefore x = 3, \quad y = 1.$$

ज्यांपासून समीकरणें उत्पन्न होतात  
असे प्रश्न.

१. अशा दोन संख्या काढ, कीं त्यांची बजाबाकी ८ होईल, आणि त्यांचा गुणाकार १२८ होईल.

उत्तर.  $\pm ८$  आणि  $\pm १६$ .

२. अशा दोन संख्या काढ, कीं त्यांची बेरीज ४० होईल, आणि त्यांच्या वर्गांची बेरीज ८१८ होईल.

उत्तर. २३, आणि १७.

३. अशी संख्या कोणती आहे, कीं जी आपल्या व्युत्क्रमापेक्षां एकानें जास्त आहे.

उत्तर.  $\frac{1}{2}(1 \pm \sqrt{5})$ .

४. एका मनुष्यानें ६० पोंडांस जितकीं मेंढरें आलीं तितकीं विकत घेतलीं, आणि त्यांपैकीं १५ ठेवून बाकीचीं ५४ पोंडांस विकलीं आणि त्या व्यापारांत त्यास एकेका मेंढरास दोन दोन शिलिंग मिळाले; तर त्यानें किती मेंढरें विकत घेतलीं होती? उत्तर. ७५.



५. अ, ब, आणि क हे तिघे मिळून कांहीं एक काम कांहीं तासांत करतात ; अच जर ते काम एकटा करूं लागता तर त्यास पूर्वांचेपेक्षां ६ तास जास्ती लागते, बस १५ तास जास्ती लागते, आणि कस दुप्पट तास लागते ; तर त्या तिघांनी किती तासांत ते काम संपविलें ?

उत्तर . ३ तास .

६. एका वर्तुळाकृति मैदानांत अब आणि कड असे दोन रस्ते गेले आहेत . त्यांत अब रस्ता कड रस्त्याचे ई बिंदूत दोन सारखे विभाग करितो , अई = २५ फूट , आणि बई =  $\frac{५}{६}$  कड - १६ फूट ; तर कडची लांबी किती आहे ? उत्तर . ४० फूट .

७. एका मनुष्यानें २४० रुपयांस कांहीं बैल विकत घेतले , पुढें त्यांपैकीं तीन गमावल्यावर बाकीचेबैल एकेका बैलास मूळ किंमतीपेक्षां ८ रुपये नफा घेऊन विकले , तेव्हां त्या व्यापारांत त्यास ५९ रुपये एकंदर नफा झाला ; तर त्यानें किती बैल विकत घेतले होते ?

उत्तर . १६ बैल .

८. कांहीं मनुष्यें दाख्खिण्याकरितां एका कलालाचे दुकानीं गेलीं; आणि दाख्खिण्याल्यानंतर पाहानात तेां आपणांकडे दुकानदाराचे ३ पोंड १२ शिलिंग झाले, पण त्या मंडळींतून दोन मनुष्यांजवळ पैसा नव्हता म्हणून बाकीच्यांनीं एक एक रुपैयां देऊन जास्ती द्यावे लागले; तर कलालाचे दुकानीं किती मनुष्यें गेलीं होती?

उत्तर. १८ मनुष्यें.

९. एक काटकोनचौकोनाकृति शेत होतें, त्याची लांबी, रुंदीपेक्षां १० यार्डांनीं जास्ती होती, आणि त्याचें क्षेत्रफळ ३००० चौरस यार्ड होतें; तर त्याची लांबी आणि रुंदी किती किती यार्ड होती?

उत्तर. ६० यार्ड आणि ५० यार्ड.

१०. अ आणि ब ह्या दोघां सरकत्यांस व्यापारांत १८ पोंड नफा झाला; बनें आपले ३० पोंड १६ महिने पर्यंत व्यापारांत ठेविले होते, आणि अनें आपला पैसा १२ महिने पर्यंत ठेविला होता आणि बारा महिन्याचे अंतीं त्यास नफा वसुदूल मिळून २६ पोंड आले; तर अनें व्यापारांत किती पैसा घातला होता?

उत्तर. २० पोंड

११. चौरस फूट अशा दगडांनीं बांधलेल्या दोन चौरस फरसबांध्या आहेत, त्यांपैकीं एकीची बाजू दुसरीचे बाजूपेक्षां १२ फूट अधिक आहे, आणि त्या दोन्ही फरसबांध्यांस मिळून २१२० दगड लागतात; तर एकेकीच्या बाजूची लांबी किती होती?

उत्तर. २६ फूट, आणि ३८ फूट.

१२. एकांनं आपला घोडा ५६ रुपयांस विकला, तेव्हां त्यास मूळ किंमतीइतका दरशेंकडा नफा झाला; तर त्यानं घोडा केवढ्याला घेतला होता?

उत्तर. ४० रुपये.

१३. दोन संख्यांची वजाबाकी ६ आहे, आणि त्यांच्या वर्गांच्या बेरजेस त्यांच्या गुणाकारानं गुणलें असतां गुणाकार ४६४० आहे; तर त्या दोन संख्या काढ.

उत्तर. १०, आणि ४.

१४. १५० मैलांवर एक गांव आहे, त्या गांवास जाण्याकरितां अ आणि ब हे दोघे एकाच वेळेस निघतात; परंतु ब पेक्षां अ दरतासास ३ मैल जास्ती चालतो, म्हणून तो त्याच्या अगोदर  $८\frac{१}{३}$  तास त्या गांवीं पोहचतो. तर दरतासास एकैक किती.

मैल चालतो? उत्तर. अ, ९, आणि ब, ६.

१५. एका गडयाचे हाताखाली एक मुलगा जर ६ तास दिला तर तो कांहीं एक काम १० तासांत संपविता; परंतु मुलाला जर १० तास काम करायला लाविलें आणि गडयाला ६ च तास लाविलें, तर त्या कामाचे  $\frac{2}{3}$  भाग काम होतें; आतां गडी मुलापेक्षां ५ तास जास्ती खपतो आहे, तर त्या दोघांस तें काम संपविण्यास किती वेळ लागेल?

उत्तर. गडी,  $10\frac{1}{2}$  तास; आणि मुलगा  $4\frac{1}{2}$  तास.

१६. कोणी एक नावाडी १० तासांत २० मैलांवर होडी नेऊन परत आणतो, आणि हें कृत्य केल्यावरून त्यास असें कळून येतें कीं, पाठीवरची भरती असतां ३ मैल जाण्यास जितका वेळ लागतो तितकाच वेळ समोरची भरती असतां २ मैल यावयास लागतो; तर त्या पाण्याचा जोर किती आहे, आणि त्यास जाण्यास आणि येण्यास किती वेळ लागतो?

उत्तर.  $\left\{ \begin{array}{l} \text{दरतासांत } 2\frac{1}{2} \text{ मैल, आणि जाण्याचा वेळ} \\ ४ \text{ तास, आणि येण्याचा वेळ } ६ \frac{1}{2} \text{ तास.} \end{array} \right.$

१७. एक चौकट समबाजू त्रिकोणाकृतींत तीन तीन

रांगा धरून उभी राहण्यापुरती फौज आहे , आणि  
जर त्यांतून ५९७ मनुष्ये काढून टाकिलीं तर बाकीच्या  
मनुष्यांनीं चारचाररांगांचें एक पोकळ चौरस होईल, ज्या चौरसाच्या  
पुढल्या एका रांगेंतील मनुष्यसंख्या त्रिकोणाच्या पुढ-  
ल्या एका रांगेंतील मनुष्यसंख्येचे वर्गमूळाहून एकांनें  
अधिक आहे ; तर त्या फौजेंत किती मनुष्ये आहेत?  
उत्तर . ६९३ मनुष्ये .

१८. १०० पोंड भांडवल घेऊन दोन सावकारांनीं  
सरकतीनें व्यापार आरंभिला ; एकांनें आपला पैसा  
तीन महिनें व्यापारांत ठेविला , आणि दुसऱ्यांनें २ च म-  
हिने ठेविला ; आणि एकेकास नफा व मुद्दल मिळून  
९९ पोंड आले ; तर एकेकाचा पैसा किती किती होता?  
उत्तर . ४५ पोंड , आणि ५५ पोंड .

१९. पायदळाच्या दोन तुकड्यांस ३९ मैलांवर  
जाऊन छावणी करण्याचा हुकूम झाला ; त्या दोन्ही  
तुकड्यांनीं एकाच वेळेस कूच केलें , परंतु एक दुस-  
रीपेक्षां  $\frac{1}{4}$  मैल दरतासास जास्ती चालली , म्हणून  
तीं एक तास अगोदर जाऊन पोहचली ; तर एकेक  
तुकडी दरतासांत किती मैल चालली ?

उत्तर. दरतासांत अनुक्रमें ३ आणि  $3\frac{1}{4}$  मैल .

२०. एका कलालानें क्लारेट दारूचे १२ डजन आणि शेरी दारूचे ७ डजन १० पोंडांस विकले; त्यानें ६ पोंडांस जितके डजन क्लारेट दारूचे विकले त्यापेक्षां १० पोंडांस शेरी दारूचे ३ डजन जास्ती विकले; तर प्रत्येक दारूचेच्या प्रत्येक डजनास काय पडलें?

उ० शेरीच्या दर डजनास २ पोंड, आणि क्लारेटच्यास ३ पोंड.

२१. काटकांन चौकोन बांधून उभ्या राहिलेल्या सैन्याच्या अ आणि ब ह्या दोन तुकड्यांतील प्रत्येकींत जेकां समोरल्या रांगेंतील मनुष्यांइतकींच बाजूचे रांगेंत मनुष्ये होती, तेव्हां त्या दोन्हींच्या समोरल्या रांगांतील एकंदर मनुष्यें ८४ होती; पण जेकां अच्या समोरल्या रांगेंतील मनुष्यांइतकीं बचे समोरील रांगेंत, आणि बच्या समोरील रांगेंतील मनुष्यांइतकीं अचे समोरील रांगेंत मनुष्ये ठेवलीं, तेव्हां दोघींच्या बाजूंचे रांगांतील एकंदर मनुष्यें ९१ होती; तर प्रत्येक तुकडींत किती किती मनुष्ये होती?

उत्तर. २३०४, आणि १२९६.

२२. अ आणि ब ह्या दोघांनीं मिळून सरकतीनें

व्यापार आरंभिन्ना; कांहीं दिवसानीं अनें आपला हिस्सा ११ पोंडांस विकला, त्यांत त्याला बऱ्या हिशा इतका दरशेकडा नफा झाला; बस ७६ पोंड नफा झाला, आणि तेव्हां असें दिसून आलें कीं, बस जितका दरशेकडा नफा पडला त्याच्या चौपट अस दरशेकडा पडला; तर एकेकानें किती किती पोंड व्यापारांत घातले होते ?

उत्तर. अर्चापेसा ५ पोंड, आणि बऱ्या १२० पोंड.

२३. से न्याची एक तुकडी काटकोनचोकोन बांधून मजल दरमजल चालली होती, तेव्हां तिचे समोरल्या रांगेंतील माणसांपेक्षां बाजूच्या रांगेंत पांच माणसें जास्ती होती; परंतु जेव्हां शत्रु दिसूं लागला तेव्हां पाठीमागील मनुष्यें घेऊन समोरल्या रांगेंत ८४५ मनुष्यें जास्ती उभीं केलीं, म्हणून त्यांत पांचच रांगा झाल्या; तर त्या तुकडींत किती मनुष्यें होती ?

उत्तर. ४५५० मनुष्यें.

२४. एका द्राक्षांचे दारूच्या आणि सिंदर दारूच्या मिश्रणांत द्राक्षांची दारू त्या मिश्रणाचे अर्धाहून २५ शेर अधिक होती, आणि सिंदर दारू त्या मिश्रणाचे

तृत यांशाहून पांच शेर कमी होती; तर त्या मिश्रणां  
त १ केक दारवेचे किती किती शेर होते?

१ दाक्षांच्या दारूचे ८५ शेर आणि  
उत्तर. १ सिंदर दारूचे ३५ शेर.

२५. एका काटकोनत्रिकोणांत पायाची आणि क-  
र्णाची वजाबाकी ६ आहे, आणि लंबाची आणि क-  
र्णाची वजाबाकी ३ आहे; तर त्या त्रिकोणाच्या तिन्ही  
बाजू काय आहेत?

उत्तर. १५, १२, आणि ९.

२६. दोन आंकड्यांची अशी संख्या कोणती आहे,  
कीं जीस तिचे डावे हातचे आंकडयांनं गुणिलें असतां  
गुणाकार ४६ येईल, आणि त्या दोन आंकडयांच्या  
बेरजेस त्याच आंकडयांनं गुणिलें असतां गुणाकार  
१० येईल.

उत्तर ७.

२७. अ आणि ब ह्यांस सरकतीच्या व्यापारांत  
१०० पोंड नफा झाला; अचें अर्धे भांडवल बच्या  
भांडवलापेक्षां १०० पोंड कमी होतें, आणि अस ब  
च्या भांडवलाचे  $\frac{2}{3}$  सांश इतका नफा झाला; तर  
एकेकाचें भांडवल किती किती होतें, आणि एकेकास



किती किती नफा झाला ?

उत्तर. { अर्चे भांडवल ६००, आणि बर्चे ४०० पोंड.  
अन्ना नफा ६०, आणि बन्ना ४० पोंड.

२८. ३२० मैल अतगवरील दोन गांवांमन दोन मित्र अ आणि ब एकमेकांस भेटावयास एकाच काळीं निघाले ; अ, ब पक्षां ८ मैल दररोज अधिक चालला, आणि ब गेले दिवसांत जितकें मैल चालला त्याच्या अर्ध दिवस एकमेकांची गाठ पडावयास लागले ; तर एकेक दररोज किती मैल चालला, आणि एकंदर किती मैल चालला ?

उत्तर. { दररोज अ २४ मैल, ब १६ मैल गेला ;  
अ एकंदर १९२ मैल, ब १२८ मैल गेला.

२९. दोन चौकोनी भांडी आहेत, त्यांपैकीं मोठ्या चें घनफळ धाकट्याचे घनफळापेक्षां २० घनफुटांनीं अधिक आहे. भांड्यांचीं बुडें चौरस आहेत, व प्रत्येक भांड्याच्या बुडाची लांबी दुसऱ्या भांड्याच्या उंची इतकी आहे, आणि त्यांचीं मांडवणें ४ : ९ ह्या प्रमाणांत आहेत ; तर एकेका भांड्याची उंची किती आहे ?

उत्तर. ५ फूट, आणि ४ फूट.

३० अ. ब. आणि क, हे तीन मित्र आपापसांत कांही पैसा वांटून घेतात; अ आपणास सगळ्या पैशाचा नवा भाग आणि  $\frac{1}{3}$  इतकें घेतो, ब बाकीच्या पैशाचा नवा भाग आणि  $\frac{1}{3}$  इतकें घेतो, आणि क शेष रस्त्याचे पैशाचा नवा भाग आणि  $\frac{1}{3}$  इतकें घेतो. आणि शेवटीं पाहतात ते कांहींच पैसा उरत नाहीत. तर तो पैसा किती आहे?

उत्तर.  $\frac{3n-3n+1}{(n-1)^2} \times ४$  पेंड.

३१ दोन गांवांचे मध्ये भ्रंजर अंमेल आहे, एके गावाहून एक मनुष्य निघाला, तो पहिल्या दिवशीं सगळ्या रस्त्याचा नवा भाग चालून गेला, दुसरे दिवशीं बाकीच्या रस्त्याचा नवा भाग चालून गेला, नग पुढें शेष रस्त्याचे नवा आणि नवा भाग असा एकेक दिवसाआड चालत गेला, तर तो २५ दिवसांत किती मेल लांब गेला?

उत्तर. अ  $\left\{ 1 - \left( 1 - \frac{1}{n} \right)^{25} \left( 1 - \frac{1}{n} \right)^{25} \right\}$ .

## प्रकरण ७.

असमपदे, गुणोत्तर, प्रमाण, आणि विकार

(१८). असमपदे > ह्याहून जास्ती, किंवा < ह्याहून कमी, ह्या चिन्हांने दाखवितात. जसे, ५ > ३, ३ < ५, आणि अ > ब, हीं असमपदे आहेत. जेव्हां सर्व पदांचीं चिन्हे बदलतात तेव्हां > ह्या चिन्हाचे < हें चिन्ह होतें, आणि < ह्या चिन्हाचे > हें चिन्ह होतें, एवढी गोष्ट शिवाय करून असमपदांचीं उदाहरणं समीकरणां प्रमाणेंच करता येतात; आणि ह्या अपवादार्थें कारण असें आहे, कीं जरी अ > ब असला तरी - अ > - ब असेलच असा नियम नाही, ह्यास उदाहरण, ५ > ३, परंतु - ५ < - ३.

## उदाहरणें.

१. म आणि न हीं दोन असमपदे आहेत असें मान, तर  $m + n = २मन$ .

कींकीं  $\therefore$  कोणतेंही वर्गपद ऋण असावयाचें नाही,  $\therefore (m-n)$  म्हणजे  $m+n-२मन$ , हें पद धन आहे,

∴ ह्या पदोंमधील धनभाग > ऋण भाग; म्हणजे,  
 $m + n > 2mn$ .

२. असें सिद्ध कर कीं,  $\sqrt{99} + \sqrt{7} > \sqrt{98} + \sqrt{2}$ .

ज्याप्रमाणें,  $\sqrt{99} + \sqrt{7} >$  किंवा  $< \sqrt{98} + \sqrt{2}$ ,

याप्रमाणें,  $(\sqrt{99} + \sqrt{7})^2 >$  किंवा  $< (\sqrt{98} + \sqrt{2})^2$ ,

म्हणजे,  $99 + 2\sqrt{77} >$  किंवा  $< 98 + 2\sqrt{392}$ ,

$2\sqrt{77} >$  किंवा  $< 2 + 2\sqrt{392}$ , ∴ प्रत्येक बाजू-  
 त १८ बजा केल्यानें,

∴  $396 >$  किंवा  $< 989 + 92\sqrt{392}$ , ∴ प्रत्येक  
 बाजूचा वर्ग केल्यानें,

∴  $1568 >$  किंवा  $< 92\sqrt{392}$ , ∴ प्रत्येक बाजूंत १६१  
 बजा केल्यानें,

आतां हे उघड आहे कीं,  $1568$  हे  $92\sqrt{392}$  ह्यां पैक्षां अधिक आहेत;  
 ∴  $\sqrt{99} + \sqrt{7}$  हे  $\sqrt{98} + \sqrt{2}$  ह्यां पैक्षां अधिक आहेत.

३. असें सिद्ध कर कीं, अपूर्णपद + त्याचा व्युत्क्रम  $> २$ .

$\frac{m}{n}$  हें अपूर्णपद घे, तर  $\frac{n}{m}$  हें त्याचा व्युत्क्रम आहे.

आतां ज्याप्रमाणें  $\frac{m}{n} + \frac{n}{m} >$  किंवा  $< २$ ,

त्याप्रमाणे  $(\frac{m}{n} + \frac{n}{m})^2 > किंवा < २$ ,

म्हणजे,  $\frac{m^2}{n^2} + २ + \frac{n^2}{m^2} > किंवा < ४$ ,

$\frac{m^2}{n^2} + \frac{n^2}{m^2} > किंवा < २$ ,  $\therefore २$  बजा केल्याने,

परंतु  $\therefore २ \frac{m}{n} \cdot \frac{n}{m} = २$ ,  $\therefore \frac{m^2}{n^2} + \frac{n^2}{m^2} > २$ , (१ उदा०)

$$\therefore \frac{m}{n} + \frac{n}{m} > २.$$

४. जर,  $y = १ + ४ \sin^2 \theta - \sin^4 \theta$ , तर  $\sin \theta$  ची कोणती किंमत धरली असतां  $y$  अतिमोठा होईल ?

$$\sin^4 \theta - ४ \sin^2 \theta = १ - y, \quad \sin^4 \theta - ४ \sin^2 \theta + ४ = ५ - y,$$

$$\therefore \sin^2 \theta - २ = \pm \sqrt{५ - y}, \quad \therefore \sin^2 \theta = २ \pm \sqrt{५ - y}.$$

उत्तर.  $\sin^2 \theta = २$  असले पाहिजेत, आणि मग  $y = ५$  होतील; कांकी, जेव्हा  $y > ५$ , तेव्हा  $\sin^2 \theta$  काढलेली  $\sin^2 \theta$  किंमत, म्हणजे  $२ \pm \sqrt{५ - y}$ , ही कल्पित होते; आणि जेव्हा  $y$  ची किंमत  $= ५$  आहे, तेव्हा  $\pm \sqrt{५ - y}$  हे पद शून्य होतें. आणि  $\sin^2 \theta = २$ .

५.  $\sqrt{७} + \sqrt{१०}$ , आणि  $\sqrt{३} + \sqrt{१९}$ , ह्या दोन पदांन कोणतें मोठें आहे? उत्तर.  $\sqrt{३} + \sqrt{१९}$ .

६.  $\left. \begin{array}{l} ४६५-७ < २६५+३, \\ \text{आणि } २६५+१ > १३-६५, \end{array} \right\} \text{ तर ६५ची पूर्णांक किंमत काढ.}$

उत्तर. ६५ = ४.

७. असें सिद्ध कर कीं  $\frac{अ+ब}{२} > \frac{२अब}{अ+ब}$ , आणि  $अ+ब > अब+अब$ .

८. असें सिद्ध कर कीं  $\frac{न-न+१}{न+न+१}$  ह्या पदाची किंमत, नची कोणतीही किंमत असल्या तरी, १ आणि  $\frac{१}{२}$  ह्यांच्या मध्ये आहेत.

## गुणोत्तर.

(१०). दोन पदांच्या किंवा दोन संख्यांच्या मध्ये महत्त्वमूलक जो संबंध असतो त्यास गुणोत्तर म्हणतात, जसें १२ हे ४ ह्यांचे निष्पट आहेत, आणि १२ ह्यांचे ३ ह्यांशी जें गुणोत्तर तें ३ आहे. हें गुणोत्तर लिहिण्याची रीति १२ : ४ अशी आहे; गुणोत्तराचा पहिला अवयव १२ ह्यास अग्रसर म्हणतात, आणि दुसरा अवयव ४ ह्यास उपाग्रसर म्हणतात.

हें गुणोत्तर  $\frac{१२}{४}$  ह्या अपूर्णांकानेंही दाखविता.

येईल,  $\therefore \frac{१३}{४} = ३.$

ह्या प्रमाणेंच १२ : ३६ हें गुणोत्तर  
 $= \frac{१३}{३६} = \frac{१}{३}$  आणि सामान्यंकरून अ : ब ह्या गुणा-  
 न्तराची किंमत  $\frac{अ}{ब}$  ह्या अपूर्णपदानें दाखवितां येईल.

एकाच पदानें गुणोत्तराच्या दोन्ही पदांस गुणि-  
 लें अथवा भागिलें तर ह्याची किंमत बदलत नाहीं.  
 कांकीं,  $अ : ब = \frac{अ}{ब} = \frac{नअ}{नब}$ .  $\therefore अ : ब = नअ : नब$ .

गुणोत्तरांत अग्रसर उपाग्रसरापक्षां अधिक किंवा  
 कमी किंवा त्याजबराबर असेल, त्याप्रमाणें त्यास अ-  
 धिक असा म्याचें, कमी असा म्याचें, किंवा सा-  
 म्याचें गुणोत्तर म्हणतात.

एकच पद अधिक असा म्याच्या गुणोत्तराच्या  
 दोन्ही पदांत मिळविलें तर तें गुणोत्तर कमी होतें,  
 आणि कमी असा म्याच्या गुणोत्तराच्या दोन्ही पदांत  
 मिळविलें तर तें गुणोत्तर अधिक होतें.

जर अ : ब हें एक मूळचें गुणोत्तर घेऊन त्या-  
 चें दोन्ही पदांत क्ष मिळविला, तर अ+क्ष : ब+क्ष हें  
 नवें गुणोत्तर होईल.

∴ ज्या प्रमाणे  $\frac{अब+बक्ष}{ब(ब+क्ष)} >$  किंवा  $< \frac{अब+अक्ष}{ब(ब+क्ष)}$ , ∴ दोन्ही गुणोत्तरांस समच्छेद केल्याने.

त्या प्रमाणे  $\frac{अ+क्ष}{ब+क्ष} >$  किंवा  $< \frac{अ}{ब}$ ,

∴ ज्या प्रमाणे  $अब+बक्ष >$  किंवा  $< अब+अक्ष$ ,  
अथवा,  $बक्ष >$  किंवा  $< अक्ष$ ,

अथवा,  $ब >$  किंवा  $< अ$ , (१८ कलमा प्रमाणे.)

त्या प्रमाणे  $\frac{अ+क्ष}{ब+क्ष} >$  किंवा  $< \frac{अ}{ब}$ ; म्हणजे,

जर  $अ > ब$ , तर  $\frac{अ+क्ष}{ब+क्ष} < \frac{अ}{ब}$ , म्हणजे ते गुणोत्तर कमी झाले;

जर  $अ < ब$ , तर  $\frac{अ+क्ष}{ब+क्ष} > \frac{अ}{ब}$ , म्हणजे ते गुणोत्तर वाढले.

एकच पद अधिक असाऱ्याच्या गुणोत्तराच्या दोन्ही पदांतून वजा केलें तर ते गुणोत्तर अधिक होतें, आणि कमी असाऱ्याच्या गुणोत्तराच्या दोन्ही पदांतून वजा केलें तर ते गुणोत्तर कमी होतें.

अ आणि ब ह्या दोन्ही पदांपेक्षां कमी जें पक्ष ते त्या प्रत्येकांतून वजा केलें तर पहिलें गुणोत्तर  $= \frac{अ}{ब}$ ,



$$\text{आणि नवें गुणोत्तर} = \frac{\text{अ-क्ष}}{\text{ब-क्ष}}$$

$$\text{ज्या प्रमाणें } \frac{\text{अब-बक्ष}}{\text{ब(ब-क्ष)}} > \text{किंवा} < \frac{\text{अब-अक्ष}}{\text{(अ-क्ष)ब}} ;$$

$$\text{म्हणजे अब-बक्ष} > \text{किंवा} < \text{अब-अक्ष}$$

$$\text{त्याप्रमाणें } \frac{\text{अ-क्ष}}{\text{ब-क्ष}} > \text{किंवा} < \frac{\text{अ}}{\text{ब}} ;$$

(१) ह्या असाम्यांतील कृण पदं उडविण्याकरिता  
त्यांत अक्ष+ बक्ष मिळीव, म्हणजे

$$\text{जसें अब- बक्ष+ अक्ष+ बक्ष} > \text{किंवा}$$

$$< \text{अब-अक्ष+अक्ष+ बक्ष},$$

$$\text{अथवा अब+अक्ष} > \text{किंवा} < \text{अब+ बक्ष},$$

$$\text{अथवा अक्ष} > \text{किंवा} < \text{बक्ष}; \text{अथवा अ} > \text{किंवा} < \text{ब},$$

तसें  $\frac{\text{अ-क्ष}}{\text{ब-क्ष}} > \text{किंवा} < \frac{\text{अ}}{\text{ब}}$ , हे मागल्याचे उ-  
लट आहे; म्हणजे,

जर  $\text{अ} > \text{ब}$ , तर  $\frac{\text{अ-क्ष}}{\text{ब-क्ष}} > \frac{\text{अ}}{\text{ब}}$ , म्हणजे गु-  
णोत्तर वाढेलं,

जर  $\text{अ} < \text{ब}$ , तर  $\frac{\text{अ-क्ष}}{\text{ब-क्ष}} < \frac{\text{अ}}{\text{ब}}$ , म्हणजे गुणो-  
त्तर कमी झालें.

अः ब आणि कः ड ह्या दोन गुणोत्तरांच्या अग्र-  
मरांचा आणि उपाग्रमरांचा परस्पर गुणाकार घेतला,  
तर उरलेल्या अकः बड ह्या नवीन गुणोत्तरास प-  
हिल्या दोन गुणोत्तरांचें संयुक्तगुणोत्तर म्हणतात.

अः ब ह्या गुणोत्तरास अः ब ह्या गुणोत्तराचा वर्ग म्हणतात.

अः बि ..... वर्गमूळ.....

अः ब ..... घन.....

अभिः बि ..... घनमूळ.....

इत्यादि .

इत्यादि .

## प्रमाण .

(२०). ज्यांचीं गुणोत्तरें बराबर असतात तीं पदे  
प्रमाणांत असतात . म्हणजे जर अः ब हें गुणो-  
त्तर कः ड ह्या गुणोत्तराबराबर आहे , म्हणजे  $\frac{अ}{ब} = \frac{क}{ड}$   
तर अ , ब , क , आणि ड हीं चार पदे प्रमा-  
णांत आहेत असें म्हणतात ; आणि अः ब :: क  
: ड , अथवा अः ब = कः ड ह्यास प्रमाण म्हण-  
तात .

## सिद्धान्त .

१. जर चार पदें प्रमाणात आहेत; तर आद्य-  
नपदांचा गुणाकार मध्यपदांच्या गुणाकाराबरा-  
बर आहे .

अ : ब :: क : ड हे एक प्रमाण घे , तर  $\frac{अ}{ब} = \frac{क}{ड}$  , आणि ह्या समीकरणाच्या दोन्ही बाजूंस डब ने गुणल्याने , अड = कब .

कुरल०१ जर अ : ब :: ब : क , तर ब = अक , आणि ब = अक , ह्यांत ब ह्यास अ आणि क ह्यांचे मध्यप्रमाण म्हणतात . ह्यावरून हे सिद्ध होतें कीं , कोणत्याही दोन पदांचे मध्यप्रमाण त्या दोन पदांचे गुणाकाराचे वर्गमुळाबराबर असतें .

कुर०२.  $\therefore$  अड = बक ,  $\therefore$  अ =  $\frac{बक}{ड}$  , ब =  $\frac{अड}{क}$  , क =  $\frac{अड}{ब}$  , ड =  $\frac{बक}{अ}$  ; ह्यावरून असें सिद्ध होतें , कीं जर प्रमाणांतील तीन पदें दिलीं आहेत तर , चवथें पद काढतां येईल . पूर्णाकांतील त्रैराशिकाची रीति ह्यावरूनच निघाली आहे .

२. जर दोन पदांचा गुणाकार दुसऱ्या दोन पदांचा

च्य गुणाकारावरोवर आहे, तर एके गुणाकाराचे अवयव आद्यंत पदे केलीं, आणि दुसरे गुणाकाराचे अवयव मध्यपदे केलीं तर तीं चार पदे प्रमाणांत होतील .

न क्ष = म य घे, तर प्रत्येक बाजूस नयनें भागल्यानें,  
 $\frac{क्ष}{य} = \frac{म}{न}$ ,  $\therefore क्ष : य :: म : न$ .

७. जर अ : ब :: क : ड, आणि क : ड :: म : न,  
 तर अ : ब :: म : न. (युक्लिड, ५ वे बूक, सिद्धान्त ४.)

कारण  $\frac{अ}{ब} = \frac{क}{ड}$ , आणि  $\frac{क}{ड} = \frac{म}{न}$ ,  $\therefore \frac{अ}{ब} = \frac{म}{न}$ ,  
 $\therefore अ : ब :: म : न$ .

४. जर अ : ब :: क : ड, तर ब : अ :: ड : क.  
 युक्लिड, ५ वे बूक, सिद्धान्त ६.)

कारण,  $\frac{अ}{ब} = \frac{क}{ड}$ ,  $\therefore \frac{ब}{अ} = \frac{ड}{क}$ ,  $\therefore ब : अ :: ड : क$ .  
 त्या कृत्यास व्यस्तीकरण म्हणतात .

५. अ : ब :: क : ड, तर अ : क :: ब : ड. (युक्लिड,  
 ५ वे बूक, सिद्धान्त ५.)

कारण  $\frac{अ}{ब} = \frac{क}{ड}$ , आणि  $\frac{ब}{क}$  ने गुणिल्यानें,  
 $\frac{अ}{क} = \frac{ब}{ड}$ ,  $\therefore अ : क :: ब : ड$ .

ह्यास पगवर्तन म्हणतात.

६. जर  $अःबः :: कःड$ , तर  $अ+बःबः :: क+डःड$ .  
(युक्लिड, ९वें बूक, सिद्धांत १७.)

कारण  $\frac{अ}{ब} = \frac{क}{ड}$ , आणि प्रत्येक बाजूत १ मिळविण्याने,

$$\frac{अ}{ब} + १ = \frac{क}{ड} + १, \therefore \frac{अ+ब}{ब} = \frac{क+ड}{ड},$$

$$\therefore अ+ब : ब :: क+ड : ड.$$

ह्यास मिश्रीकरण म्हणतात.

७. जर  $अःब :: कःड$ , तर  $अ-बःब :: क-डःड$ .  
(युक्लिड, ९वें बूक, सिद्धांत ८.)

$$\text{कारण } \frac{अ}{ब} = \frac{क}{ड}, \therefore \frac{अ}{ब} - १ = \frac{क}{ड} - १,$$

$$\therefore \frac{अ-ब}{ब} = \frac{क-ड}{ड}, \therefore अ-ब : ब :: क-ड : ड.$$

ह्यास विभागीकरण म्हणतात.

८. जर  $अःब :: कःड$ , तर  $अ-बःअ :: क-डःड$ ,  
आणि  $अःअ-ब :: कःक-ड$ . (युक्लिड, ९वें बूक,  
सिद्धांत ९.)

$$\text{कारण ७सि.प्र. } \frac{अ-ब}{ब} = \frac{क-ड}{ड},$$

आणि ४ सि० प्र०  $\frac{ब}{अ} = \frac{उ}{क}$ ,

$\therefore \frac{अ-ब}{ब} \times \frac{ब}{अ} = \frac{क-उ}{उ} \times \frac{उ}{क}$ ,

$\frac{अ-ब}{अ} = \frac{क-उ}{क}$ ,  $\therefore अ-ब : अ :: क-उ : क$ ,

आणि  $अ : अ-ब :: क : क-उ$ ,  $\therefore$  व्यस्तीकरणाने .

९. जर  $अ : ब :: क : उ$ , तर

$अ+ब : अ-ब :: क+उ : क-उ$ , (युक्लिड, ५ वें बूक,  
सिद्धान्त ८ कुरन्ठ.)

कारण  $\frac{अ+ब}{ब} = \frac{क+उ}{उ}$ ,  $\therefore$  ६ सि० प्र०

आणि  $\frac{अ-ब}{ब} = \frac{क-उ}{उ}$ ,  $\therefore$  ७ सि० प्र०

$\therefore \frac{अ+ब}{ब} \div \frac{अ-ब}{ब} = \frac{क+उ}{उ} \div \frac{क-उ}{उ}$

$\therefore \frac{अ+ब}{अ-ब} = \frac{क+उ}{क-उ}$ ,  $\therefore अ+ब : अ-ब :: क+उ : क-उ$ .

१०. जर  $अ : ब :: क : उ :: इ : फ$ , तर

$अ : ब :: अ+क+इ+इ० : ब+उ+फ+इ०$  (युक्लिड,  
५ वें बूक, सिद्धान्त १४.)

$$\therefore \frac{अ}{ब} = \frac{क}{उ}, \therefore अउ = बक, \therefore \frac{उ}{क} = \frac{इ}{फ}, \therefore अफ = बई,$$

आणि अब = अब

$$\therefore \text{वेरजेने, } अब + अउ + अफ = अब + बक + बइ.$$

$$अ(ब + उ + फ) = ब(अ + क + इ);$$

$$\therefore \text{रमि.प्र.}, अ : ब :: अ + क + इ : ब + उ + फ$$

आणि जेव्हा द्याहून अधिक पद घेतली आहेत तेव्हा ही व्याप्रमाणेच जाणवेल.

$$११. \text{ जर } अ : ब :: क : उ, \text{ तर } मअ : मब :: \frac{क}{न} : \frac{उ}{न}.$$

$$\text{आणि } मअ : \frac{ब}{न} :: मक : \frac{उ}{न}.$$

$$\text{कारण } \frac{अ}{ब} = \frac{क}{उ}, \therefore (\text{एकल.प्र.}) \frac{मअ}{मब} = \frac{\frac{क}{न}}{\frac{उ}{न}},$$

$$\therefore मअ : मब :: \frac{क}{न} : \frac{उ}{न}.$$

$$\text{पुनः, } \frac{अ}{ब} = \frac{क}{उ}, \therefore \frac{मअ}{ब} = \frac{मक}{उ}, \frac{मअ}{\frac{ब}{न}} = \frac{मक}{\frac{उ}{न}},$$

$$मअ : \frac{ब}{न} :: मक : \frac{उ}{न}.$$

$$१२. \left. \begin{array}{l} \text{जर } अ : ब :: क : उ \\ \text{आणि } इ : फ :: ग : ह \end{array} \right\} \text{ तर } अइ : बफ :: कग : उह.$$

कारण  $\frac{अ}{ब} = \frac{क}{ड}$ ,  $\frac{ड}{क} = \frac{ग}{ह}$ ,  $\therefore$  गुणाकारने,  $\frac{अड}{बक} = \frac{कग}{डह}$ ,

$\therefore$  अई : बफ :: कग : डह.

आणखी कितीही जरी प्रमाणें असलीं तरीही ह्या-  
प्रमाणेंच जाणावें.

१७. जर अ : ब :: क : ड, तर अ : ब :: क : ड,  
जिथ तरी पूर्ण संख्या असो किंवा अपूर्ण संख्या असो.  
युक्लिड, ५ वें बूक, सिद्धांत १७.)

कारण  $\frac{अ}{ब} = \frac{क}{ड}$ ,  $\therefore \frac{अ}{ब} = \frac{क}{ड}$ ,  $\therefore$  अ : ब :: क : ड.

१८. जर अ : ब :: ब : क, तर अ : क :: अ : ब.  
युक्लिड, ५ वें बूक, सिद्धांत १८.)

कारण  $\frac{अ}{ब} = \frac{ब}{क}$ ,  $\therefore \frac{अ}{क} = \frac{अ}{ब} \times \frac{ब}{क} = \frac{अ}{ब} \times \frac{अ}{ब} = \frac{अ^2}{ब^2}$ ,  
 $\therefore$  अ : क :: अ : ब.

१९. जर अ : ब :: ब : क :: क : ड, तर अ : ड :: अ : ब.  
युक्लिड, ५ वें बूक, सिद्धांत १९.)

कारण  $\frac{अ}{ड} = \frac{अ}{ब} \times \frac{ब}{क} \times \frac{क}{ड}$ , आणि  $\frac{अ}{ब} = \frac{ब}{क} = \frac{क}{ड}$ ,



$$\therefore \frac{अ}{उ} = \frac{अ}{ब} \times \frac{अ}{ब} \times \frac{अ}{ब} = \frac{अ^3}{ब^3}, \therefore अ : उ :: अ^3 : ब^3.$$

ह्या सिद्धांतान आणि मागील सिद्धांतान, दिलेलीं  
पदे अखंड प्रमाणांत आहंत

## विकार

(२१). दोन पदांत जेव्हां परस्परं असा संबंध असतो, कीं एकांत कांहीं फेरफार झाला असता त्याच प्रमाणानें दुसऱ्यांतही फेरफार होतो, तेव्हां तीं दोन पदे परस्परसमविकार पावतात असें म्हणतात.

मनांत आण कीं अ आणि ब ह्यांचा परस्परं असा संबंध आहे कीं अची किंमत जर अ झाली तर बची किंमत ब ही अशी होते, कीं अ : अ :: ब : ब; तर अ, ब प्रमाणेंच समविकृत होतो, म्हणजे, अ ५ ब.

ह्यास उदाहरण, एका त्रिकोणाचें क्षेत्रफळ दाखवायास  $\triangle$  हें चिन्ह घे, पायाची लांबी दाखवायास प घे, आणि लंबाची उंची दाखवायास ल घे; तर ल जर नियमित आहे तर  $\triangle \propto प$ . (युक्लिड, ६वें बूक, सिद्धांत १.)

मनांत आण, कीं अ आणि ब ह्यांचा परस्परें  
असा संबंध आहे कीं अची किंमत अ झाली असतां  
बची किंमत ब ही अशी होणे कीं अ:अ:: $\frac{1}{ब}$ : $\frac{1}{ब}$ ;  
तर अ, ब प्रमाणेंच व्यस्तविकृत होतो. म्हणजे अ  $\propto \frac{1}{ब}$ .

वरचे प्रमाणेंच त्रिकोणाचीं तींच परिमाणें दाख  
वाया म  $\triangle$ , प, आणि लघे, तर  $\triangle = \frac{1}{3}$  पल.  
(युक्लिड, १ लें बूक, मिद्वांत ४१.) आणि जर  $\triangle$  निय-  
मित आहे, आणि प जर वाढत आहे तर लस त्या-  
प्रमाणानेंच कमी होत गेलें पाहिजे, म्हणजे जर प-  
ची किंमत म प झाली तर लची किंमत  $\frac{ल}{म}$  होईल,  
∴ उ प्रमाणेंच प व्यस्तविकृत होतो, म्हणजे प  $\propto \frac{1}{ल}$ .

मिद्वांत. अ जर ब प्रमाणेंच विकृत होत आहे  
तर अ, ज्याची किंमत नियमित आहे अशा पदानें  
बस गुणून जो गुणाकार त्याबरोबर आहे.

कांकीं, ∴ अ:अ::ब:ब, ∴ अ:अ::मब:मब,  
∴ परावर्तनानें अ:मब::अ:मब; म्हणून म जर  
असा घेतला कीं अ = मब, तर सर्वदां अ = मब.

ह्याची उलट, जर अ = मब, आणि मची किं-  
मत नियमित आहे, तर अ  $\propto$  ब

\* \* \* विकारचें समीकरण बनवावें, म्हणून हा सिद्धान्त  
 ह्या विषयांत बहुत उपयोगी आहे.

## असमपदांची, गुणोत्तरांची प्रमाणांची आणि विकारांची उदाहरणे

१. १५:१७ आणि १५:२० ह्या गुणोत्तरांत  
 कोणतें गुणोत्तर मोठे आहे ?

$$\left. \begin{aligned} \frac{15}{17} &= \frac{15}{17} \times \frac{19}{19} = \frac{285}{323} \\ \frac{15}{20} &= \frac{15}{20} \times \frac{17}{17} = \frac{255}{340} \end{aligned} \right\} \therefore 17 \div 19 \text{ हें मोठे आहे.}$$

२. असें सिद्ध कर कीं  $a^2 + b^2$  :  $a + b$  हें गुणोत्तर  
 $a^2 + b^2$  :  $a + b$  ह्या गुणोत्तरापेक्षा अधिक आहे.

$$\frac{a^2 + b^2}{a + b} = \frac{a^2 + b^2}{a^2 + b^2} \times \frac{a + b}{a + b} = \frac{a^2 + ab + ab + b^2}{(a^2 + b^2)(a + b)}$$

$$\frac{a^2 + b^2}{a + b} = \frac{a^2 + b^2}{a + b} \times \frac{a + b}{a + b} = \frac{a^2 + 2ab + b^2}{(a^2 + b^2)(a + b)}$$

$\therefore$  जसें  $a^2 + b^2 > किंवा < 2ab$ ,

म्हणजे  $a^2 + b^2 > किंवा < 2ab$ ,

तसें  $a^2 + b^2$  :  $a + b > किंवा < a^2 + b^2$  :  $a + b$ ,

परंतु (कलम १८, उदा० प्र०)  $अ^३ + ब^३ > २अब$ ,

∴  $अ^३ + ब^३ : अ^३ + ब^३ > अ^३ + ब^३ : अ + ब$ .

३. जर क्षःय हें अःब ह्या गुणोत्तराचा वर्ग आहे,  
आणि अःब हें अ+क्षःक्ष-य ह्या गुणोत्तराचें वर्ग-  
मूळ आहे, तर २क्षःअ :: क्ष-यःय.

$$क्षःय :: अ^३ : ब^३ \dots\dots (१) \therefore \frac{क्ष}{य} = \frac{अ^३}{ब^३},$$

$$\sqrt{अ+क्ष} : \sqrt{अ-य} :: अःब, \dots (२) \therefore \frac{अ+क्ष}{अ-य} = \frac{अ^३}{ब^३},$$

$$\therefore \frac{अ+क्ष}{अ-य} = \frac{क्ष}{य} \therefore अ+क्ष : अ-य :: क्षःय.$$

(कल० २) विभागीकरणानें, क्ष+यः अ-य :: क्ष-यःय,

परावर्तनानें, क्ष+यः क्ष-य :: अ-यःय,

मिश्रीकरणानें, २क्षः क्ष-य :: अःय,

∴ परावर्तनानें, २क्षः अ :: क्ष-यःय

$$\left. \begin{array}{l} ४. \text{ जर } क्ष^३ + य^३ : क्षय :: १३ : ६ \\ \text{आणि } क्ष^३ - य^३ = २० \end{array} \right\} \text{ तर } क्ष = ६, य = ४.$$

(२० कलमाप्रमाणें) क्ष^३ + य^३ : २क्षय :: १३ : १२,

क्ष^३ + २क्षय + य^३ : क्ष^३ - २क्षय + य^३ :: २९ : १,

क्ष+य : क्ष-य :: ९ : १,

$$२क्ष : २य :: ६ : ४,$$

$$क्ष : य :: ३ : २,$$

$$\therefore क्ष = \frac{३}{२} य, \therefore \frac{१}{४} य - य = २०, ९ य - ४ य = ८०,$$

$$५ य = ८०, \therefore य = १६, \therefore य = \pm ४;$$

$$क्ष = \frac{३}{२} य = \frac{३}{२} \times \pm ४ = \pm ६.$$

५. जर  $य = प + क + र$ , ज्यांत पची किंमत नियमित आहे, आणि  $क \propto क्ष$ , आणि  $र \propto \frac{१}{क्ष}$ , आणि जर  $क्ष = १, २, ३$ ,  $य = ३, ५, ७$ ; तर असें सिद्ध कर की  $य = प + क्ष - \frac{१}{क्ष}$ .

$क = अक्ष$ ,  $र = \frac{ब}{क्ष}$  ये. तर  $य = प + अक्ष + \frac{ब}{क्ष}$ ,  
पण जर  $क्ष = १$ ,  $य = ३$ , तर  $३ = प + अ + ब \dots (१)$

$\dots \dots \dots क्ष = २$ ,  $य = ५$ ,  $\frac{५}{२} = प + २अ + \frac{ब}{२} \dots (२)$

$\dots \dots \dots क्ष = ३$ ,  $य = ७$ ,  $७ = प + ३अ + \frac{ब}{३} \dots (३)$

$$\left. \begin{array}{l} (२) - (१), \frac{५}{२} = अ + \frac{ब}{२}, \\ (३) - (२), \frac{७}{३} = अ + \frac{ब}{३}, \end{array} \right\} \text{ह्यांची वजाबाकी घे}$$

$$१ = -\frac{ब}{३}, \therefore ब = -३,$$

$$\frac{५}{२} = अ + \frac{३}{२}, \therefore अ = १,$$

$$x = 5 + 1 - 3, \therefore x = 3,$$

$$\therefore y = 5 + 3 - 3.$$

૬. જરૂર  $x^2 = a^2 + b^2$ , આણિ  $y^2 = c^2 + d^2$ , તર  
અસંસિદ્ધ કરકીં સય, અક+બડ આણિ અડ+બક  
દ્યા રોન પદોંતૂન પ્રત્યેકાહૂન મોઠા આહે.

$$\begin{aligned} x^2 y^2 &= a^2 c^2 + b^2 d^2 + a^2 d^2 + b^2 c^2, \\ &= a^2 c^2 + 2અકબડ + b^2 d^2 + a^2 d^2 - 2અડબક + b^2 c^2, \\ &= (અક+બડ)^2 + (અડ-બક)^2, \end{aligned}$$

$$\therefore x y = \sqrt{(અક+બડ)^2 + (અડ-બક)^2},$$

$$\therefore x y > અક + બડ.$$

$$\begin{aligned} \text{પુનઃ, } x^2 y^2 &= a^2 d^2 + b^2 c^2 + a^2 c^2 + b^2 d^2 \\ &= a^2 d^2 + 2અડબક + b^2 c^2 + a^2 c^2 - 2અકબડ + b^2 d^2, \\ &= (અડ+બક)^2 + (અક-બડ)^2, \end{aligned}$$

$$\therefore x y = \sqrt{(અડ+બક)^2 + (અક-બડ)^2},$$

$$\therefore x y > અડ + બક.$$

૭. જરૂર  $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f} = 2$ , તર અસંસિદ્ધ કરકીં

$$(१) \frac{अ}{ब} = \sqrt{\frac{अ^२+क^२+इ^२+इ०}{ब^२+ड^२+फ^२+इ०}}, (२) \frac{अ}{ब} = \frac{मअ+नक+पइ+इ०}{मब+नड+पफ+इ०}$$

$$(१) \frac{अ}{ब} = \frac{क}{ड}, \therefore अड = बक \therefore अ^२ड^२ = ब^२क^२$$

$$\frac{अ}{ब} = \frac{इ}{फ}, \therefore अफ = बइ, \therefore अ^२फ^२ = ब^२इ^२$$

$$\text{आणि } अ^२ब^२ = अ^२ब^२$$

$$\therefore \text{बेरजेनें, } अ^२ब^२ + अ^२ड^२ + अ^२फ^२ = अ^२ब^२ + ब^२क^२ + ब^२इ^२$$

$$अ^२(ब^२ + ड^२ + फ^२) = ब^२(अ^२ + क^२ + इ^२),$$

$$\therefore \frac{अ^२}{ब^२} = \frac{अ^२ + क^२ + इ^२}{ब^२ + ड^२ + फ^२} \therefore \frac{अ}{ब} = \sqrt{\frac{अ^२ + क^२ + इ^२ + इ०}{ब^२ + ड^२ + फ^२ + इ०}}$$

$$(२) \frac{अ}{ब} = \frac{मअ}{मब}, \frac{अ}{ब} = \frac{क}{ड}, \frac{अ}{ब} = \frac{इ}{फ},$$

$$अड = बक \quad अफ = बइ,$$

$$अमब = बमअ, अनड = बमक, अपफ = बपइ,$$

$$\text{म्हणून, } अमब + अनड + अपफ = बमअ + बमक + बपइ,$$

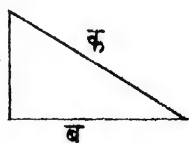
$$अ(मब + नड + पफ) = ब(मअ + नक + पइ),$$

$$\therefore \frac{अ}{ब} = \frac{मअ + नक + पइ + इ०}{मब + नड + पफ + इ०}$$

८. एका काटकोनत्रिकोणांत जसें मःन तशी दोन

बाजूंनी बेरीज त्याचे कर्णास आहे, तर असे सिद्ध करू, मची किंमत  $n\sqrt{2}$  ह्यापेक्षा अधिक होणार नाही

दोन्ही बाजू दाखवायाम अ आणि ब, आणि कर्ण दाखवा



याम क घे, तर  $a+b : c :: m : n$ ,

(युक्लिड, १३वें ब्रूक, सि० ६७.)  $a^2 + b^2 = c^2$ ,

$$\frac{a+b}{c} = \frac{m}{n}, \therefore a+b = c \frac{m}{n},$$

$$\left. \begin{aligned} a^2 + 2ab + b^2 &= c^2 \frac{m^2}{n^2} \\ 2a^2 + 2b^2 &= 2c^2 \end{aligned} \right\} \text{ वजाबाकी कर.}$$

$$a^2 - 2ab + b^2 = c^2 \frac{m^2}{n^2} - c^2 \frac{m^2}{n^2} = \frac{c^2}{n^2} (2n^2 - m^2),$$

$$\therefore \left. \begin{aligned} a-b &= \pm \frac{c}{n} \sqrt{2n^2 - m^2} \\ a+b &= \frac{c}{n} m \end{aligned} \right\} \text{ बेरीज आणि वजाबाकी कर.}$$

$$\therefore 2a = \frac{c}{n} (m \pm \sqrt{2n^2 - m^2}),$$

$$b = \frac{c}{n} (m \mp \sqrt{2n^2 - m^2}).$$

आतां जेव्हा  $m^2 > 2n^2$ , म्हणजे  $m > n\sqrt{2}$  तेव्हा



२अ आणि २ब ह्यांच्या किंमती कल्पित होताना,  
 $\therefore$  म हा न  $\sqrt{२}$  ह्यापेक्षा अधिक होणार नाही.

## उदाहरणे

१. ३: ७ आणि ४: ९ ह्या दोन गुणोत्तरांतून  
 कोणते मोठे आहे? उत्तर. ४: ९.

२. २: ९ आणि १२: ५ ह्या दोन गुणोत्तरांचे सं-  
 युक्त गुणोत्तर काय? उत्तर. ८: १९.

३. म: दृक्ष<sup>१</sup>, ३य<sup>१</sup>: न, आणि क्ष<sup>१</sup>: २य<sup>१</sup>, ह्या  
 तीन गुणोत्तरांचे संयुक्त गुणोत्तर काय?

उत्तर. म: ४न.

४. जर क्ष > य, तर (क्ष-य) आणि (क्ष<sup>२</sup>-य<sup>२</sup>)<sup>२</sup>  
 ह्या दोहोंत मोठे कोणते? उत्तर. क्ष-य.

५. जर अ < ब, आणि ब < क, तर असें दा-  
 खीव कीं अ < क.

६. जर अ:ब:: क:ड, तर असें सिद्ध कर कीं  
 मअ $\pm$ नब:पअ $\pm$ कब::मअ $\pm$ नड:पक $\pm$ कड.

७. जर क्ष=य+१२, आणि { तर असें दाखीव कीं  
 $\sqrt{क्षय}:४::\frac{१}{२}(क्ष+य):९, \}$  क्ष=१६, आणि य=४.

८. जर  $a > b$ , तर असें दाखीव कीं  
 $\sqrt{a^2 - b^2} + \sqrt{a^2 - (a-b)^2} > a$ .

९. य ५५, आणि जेव्हां  $s=2$ ,  $y=90$ , तेव्हां  
 असें सिद्ध कर कीं  $y=45$ .

१०. अशा दोन संख्या काढ कीं ज्या परस्परांस  
 द्वीतील जसे ३, २, आणि ज्यांच्या बेरजेस त्यांच्या  
 गुणाकारांनं गुणून जो गुणाकार घेईल तो त्यांच्या  
 वर्गांच्या वजाबाकीच्या बारापट होईल.

उत्तर. ६ आणि ४.

११. यै ५  $a^2 - s^2$ , असें घेऊन जेव्हां  $s=0$   
 तेव्हां  $y=b$  असें मान; तर  $y^2 = \frac{b^2}{a^2} (a^2 - s^2)$ .

१२. जर  $s:y :: a:b$ , आणि  $\left\{ \begin{array}{l} \text{तर असें सिद्ध कर कीं} \\ \sqrt{a^2 + s^2} : \sqrt{b^2 + y^2} :: a:b, \end{array} \right\}$  उ ५५ = क य.

१३. अखंड प्रमाणांत अशा तीन संख्या काढ कीं  
 ज्यांची बेरीज ५२ येईल, आणि ज्यांच्या आद्यंत प-  
 दांची बेरीजः मध्यपद :: १० : ३. उत्तर. ४, १२, ३६.

## प्रकरण ८

### गणित श्रेढी

(२२). पदांचे ज्या श्रेढीतील पदे एकाच उतरगने वाढतात किंवा उतरतात, त्या श्रेढीस गणितांशेढी म्हणतात. जसें १, ३, ५, ७, ९ ही गणितांशेढी आहे. हिचे पहिले पद १, शेवटील पद ९, उत्तर-२ गच्छ ५, आणि सर्वधन २५ आहे. जर हीच श्रेढी ९, ७, ५, ३, १ अशी लिहिली, तर हिचे पहिले पद ९, शेवटील पद १, आणि उत्तर-२, होईल.

सिद्धान्त. कोणत्याही एकाद्या गणितांशेढीचे न वे पद आणि सर्वधन काढावयाचे.

श्रेढीचे पहिले पद दाखवायास अ, शेवटील किंवा नवे पद दाखवायास ल, उत्तर दाखवायास ड, गच्छ दाखवायास न, आणि सर्वधन दाखवायास स ये; तर ती श्रेढी अशी होईल

अ, (अ+ड), (अ+२ड), (अ+३ड), {अ+(न-१)ड}.

आतां ह्या श्रेढीतील कोणतेही एकादे पद काढावयाचे आहे तर जितक्यावे पद काढावयाचे आहे त्या

मंरखें- १ वजा करून बाकीनें उत्तरास गुणावें आ-  
णि तो गुणाकार पहिल्या पदांत मिळवावा म्हणजे  
झालें; आणि शेवटील पद ल = अ + (न-१) ड.

ही व श्रेणी उलटी लिहिली तर ती अशी होईल

ल, (ल-ड), (ल-२ड), (ल-३ड) ... अ.

∴ स = अ + (अ+ड) + (अ+२ड) + ... + (ल-२ड) + (ल-ड) + ल,

आणिस = ल + (ल-ड) + (ल-२ड) + ... + (अ+२ड) + (अ+ड) + अ,

∴ २स = (ल+अ) + (ल+अ) + ... + (ल+अ) + (ल+अ) + (ल+अ).

= न वेळां (ल+अ),

∴ २स = (ल+अ) × न, ∴ स = (ल+अ)  $\frac{n}{2}$ .

परंतु ∵ ल = अ + (न-१) ड, ∴ ल+अ = २अ + (न-१) ड,

∴ स = { २अ + (न-१) ड }  $\frac{n}{2}$  = नअ +  $\frac{n(n-१)ड}{२}$ .

दोन पदांचें गणित मध्य प्रमाण = त्या दोन

पदांच्या बेरजेचें अर्ध; म्हणजे जर म =  $\frac{अ+ब}{२}$  तर

म हें अ आणि ब ह्यांचें गणित मध्य प्रमाण आहे.

जेव्हां गणित श्रेणीतील गच्छ विषम आहे, ते

व्हां मधलें पद = त्या पदापासून सारखें अंतरावर

असणाऱ्या कोणत्याही दोन पदांच्या बेरजेचें अर्ध.

## उदाहरणें

१. २+५+८+ इत्यादि १७ पदांपर्यंत एक श्रेणी आहे, तर तिचे सर्वधन काय आहे ?

येथे  $a=2$ ,  $d=3$ ,  $n=17$ ,

$$\therefore S = n a + \frac{n(n-1)d}{2} = 17 \times 2 + \frac{17 \times 16 \times 3}{2}$$

$$= 34 + 816 = 850 \quad \text{उत्तर.}$$

२.  $\frac{1}{2} + \frac{3}{4} + \frac{5}{8} + \dots$ , २० पदांपर्यंत एक श्रेणी आहे, तर तिचे सर्वधन काय आहे ?

येथे  $a = \frac{1}{2}$ ,  $d = -\frac{1}{4}$ ,  $n = 20$ ,

$$\therefore S = n a + \frac{n(n-1)d}{2} = 20 \times \frac{1}{2} + \frac{20 \times 19 \times -\frac{1}{4}}{2},$$

$$= 10 - \frac{95}{2} = \frac{20 - 95}{2} = -\frac{75}{2} \quad \text{उत्तर.}$$

३. एका गणितश्रेढीचे सर्वधन ९५०, उत्तर ३, आणि गच्छ २५ आहे; तर तिचे शेवटील पद काय आहे ?

येथे  $S = 950$ ,  $d = 3$ ,  $n = 25$ ,

$$S = n a + \frac{n(n-1)d}{2},$$

$$\therefore ९५० = २५अ + \frac{२५ \times २४ \times ३}{२} = २५अ + ९००,$$

$$\therefore ५० = २५अ, \therefore अ = २, \text{ पहिलें पद.}$$

$$\text{आतां ल} = अ + (न-१)उ = २ + २४ \times ३ = ७४. \text{ उत्तर.}$$

४. १ आणि -१ ह्यांत पांच गणितप्रमाणें घाल.

येथें अ = १, ल = -१, आणि  $\therefore ५$  मध्यपदें आणि २ आद्यंतपदें आहेत,  $\therefore न = ५ + २ = ७$ .

$$\text{ल} = अ + (न-१)उ, \therefore उ = \frac{\text{ल}-अ}{न-१} = \frac{-१-१}{७-१} = -\frac{२}{६} = -\frac{१}{३},$$

$$\therefore १ - \frac{१}{३} = \frac{२}{३} = \text{पहिलें मध्यप्रमाण.}$$

$$\frac{२}{३} - \frac{१}{३} = \frac{१}{३} = \text{दुसरें.....}$$

$$\frac{१}{३} - \frac{१}{३} = ० = \text{तिसरें.....} \quad \text{उत्तर.}$$

$$० - \frac{१}{३} = -\frac{१}{३} = \text{चवथें.....}$$

$$-\frac{१}{३} - \frac{१}{३} = -\frac{२}{३} = \text{पांचवें.....}$$

५. एका पोकळ समबाजू त्रिकोणाकृतींत तीन तीन रांगा लावून कांहीं शिपाई उभे केले आहेत, आणि बाहेरील रांगेंत न शिपाई आहेत, तर एकंदर किती शिपाई आहेत ?

प्रथमतः, तो त्रिकोण भरीव आहे असें समजून नी मनुष्यसंख्या काढावयाची

$$अ=१, ल=न, न=न,$$

$$स=(अ+ल)\frac{न}{२}=(१+न)\frac{न}{२}=\frac{न+न}{२}.$$

पुनः, पोकळ भागांत किती मनुष्ये उभी राहतील ते काढावयाचे,

$$अ=१, न_१=न-१=ल,$$

$$स_१=(अ+ल_१)\frac{न_१}{२}=(१+न-१)\frac{न-१}{२}=\frac{न^२-१७न+७२}{२}.$$

आतां, पहिली मनुष्यसंख्या - दुसरी संख्या = जी संख्या काढावयाची ती;

$$\therefore स-स_१=\frac{न+न}{२}-\frac{न^२-१७न+७२}{२}=\frac{१८न-७२}{२}=९न-३६.$$

जर र रांगी असल्या, तर न = न - ३६; आणि शिपायांची संख्या =  $\frac{३६}{२}(२न+१-३६)$ .

६.  $१^२ + २^२ + ३^२ \dots + न^२$ , ह्या श्रेढीचे सर्वधन काढ.

$$१^२ + २^२ + ३^२ + \dots + न^२ =$$

$$१+(३+५)+(७+९+११)+(१३+१५+१७+१९)+\dots+न^२,$$

असल्या प्रकारच्या न रकमा आहेत आणि नव्या रकमेत न पदे आहेत.

म्हणून पदांची एकंदर संख्या काढावयाची,

$$अ=१, \quad उ=१, \quad न=न,$$

$$\therefore \{२+न-१\} \frac{न}{२} = \frac{न+न}{२} = \text{एकंदरसगळीं पदे}.$$

आतां, सर्व श्रेढीचें सर्वधन काढावयाचें,

$$अ=१, \quad उ=२, \quad न=\frac{न+न}{२},$$

$$\therefore स=\left\{२+\left(\frac{न+न}{२}-१\right) \cdot २\right\} \frac{न+न}{४} = \left(\frac{न+न}{२}\right)^२.$$

$$\text{परंतु } \frac{न+न}{२} = १+२+३+\dots+न,$$

$$\therefore १^२+२^२+३^२+\dots+न^२=(१+२+३+\dots+न)^२.$$

७. प गणितश्रेढीचीं सर्वधनें स<sub>१</sub>, स<sub>२</sub>, स<sub>३</sub>, इ० स<sub>प</sub> आहेत; प्रत्येक श्रेढी न पदांपर्यंत वाढविली आहे; प्रत्येक श्रेढीचीं पहिलीं पदे १, २, ३, ४, इ० आणि उत्तरे १, ३, ५, ७, इ० आहेत; तर अंके सिद्ध करकी

$$स_१+स_२+स_३+इ०+स_प = \frac{१}{२} \times नप (नप+१)$$

$$\left. \begin{array}{l} स_१=१, २, ३, \\ स_२=२, ५, ८, \\ स_३=३, ८, १३, \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{इ० नपदांपर्यंत,} \\ \therefore \text{१लें उत्तर } १=२ \times १-१, \\ \text{२रें } \dots \quad ३=२ \times २-१, \\ \text{३रें } \dots \quad ५=२ \times ३-१, \\ \therefore \text{पवे } \dots = २ \times प-१, \end{array}$$



∴ स<sub>५</sub> = ५, ३५-१, ५५-२, इ० न पदांपर्यंत = पवीश्रेणी.

$$\text{आतां, } स_१ = नअ + \frac{न(न-१)३}{२} = न + \frac{न(न-१)}{२} = \frac{न^३ + न}{२},$$

$$स_२ = \dots\dots\dots = २न + \frac{न(न-१)}{२} \cdot ३ = \frac{३न^३ + न}{२},$$

$$स_३ = \dots\dots\dots = ३न + \frac{न(न-१)}{२} \cdot ५ = \frac{५न^३ + न}{२},$$

$$स_५ = \dots\dots\dots = ५न + \frac{न(न-१)}{२} \cdot (३५-१) = \frac{(३५-१)न^३ + न}{२},$$

ह्या पदांचें उत्तर न० आहे, ∴ हीं गणितप्रमाणांत आहेत; आतां ह्यांचें सर्वधन काढावयाचें,

$$अ = \frac{न^३ + न}{२}, \text{ ल} = \frac{(३५-१)न^३ + न}{२}, \text{ न} = ५,$$

$$\begin{aligned} \therefore स &= (अ + ल) \frac{न}{२}, = \left\{ \frac{न^३ + न}{२} + \frac{(३५-१)न^३ + न}{२} \right\} \frac{५}{२} \\ &= \frac{१}{२} न५(न५ + १). \end{aligned}$$

८. पायदळाच्या एका तुकडीनें सकाळीं साहा बाज-  
तां कूच केलें, आणि ती दरतासास  $३\frac{१}{२}$  मैल चालली;  
तिचे पाठीमागून तीन तासांनीं त्याच स्थळाहून बोडेसार  
पाठविले, आणि ते पहिल्या तासास  $३\frac{१}{२}$  मैल, दुसऱ्या

तासांत ४ मैल, तिसऱ्या तासांत  $4\frac{1}{2}$  मैल, ह्याप्रमाणें चालले, तर त्या स्वारांनीं किती वेळांन पायदळीस गांठलें?

पायदळीस गांठवयास घोडेस्वारांस जितके तास लागले ते दाखवायास क्ष घे,

तर क्ष तासांत घोडेस्वार किती मैल चालले तें काढ,

$$अ = \frac{७}{२}, \quad उ = \frac{१}{२}, \quad न = ११,$$

$$\therefore स = \frac{न}{२} \{ २अ + (न-१)उ \} = \frac{११}{२} \left\{ ७ + (११-१)\frac{१}{२} \right\}$$

$$= \frac{११}{२} \left( \frac{१३}{२} + \frac{११}{२} \right) = \frac{१३११ + १२१}{४} = \text{जितके}$$

मैल घोडेस्वार क्ष तासांत गेले ते.

पुनः,  $११ + ३ =$  पायदळी जितके तास चालले ते,

$\therefore \frac{७}{२} (११ + ३) =$  जितके मैल तें चालले ते,

$$\therefore \frac{७}{२} (११ + ३) = \frac{१३११ + १२१}{४}, \quad १३११ + १२१ = १४११ + ४२,$$

$$१२१ - ११ = ४२, \therefore ११ = ७ \text{ ताम. उत्तर.}$$

९. असें सिद्ध कर कीं एका गणितश्रेणींतील २म पदांचें उत्तरार्थ त्याच श्रेणींतील ७म पदांच्या सर्वधनाच्या  $\frac{१}{२}$  शा बराबर आहे.

अ, अ+उ, अ+२उ, अ+३उ, अशी श्रेणी घे.

तर, २न पदांच्या उत्तरार्धाचें सर्वधन काढावयाचें,  
अ=अ, उ=उ, न=न,  $\therefore$  ल=अ+(न-१)उ=  
नवें अथवा पूर्वार्धाचें शेवटील पद .

$\therefore$  अ+(न-१)उ+उ, म्हणजे अ+नउ=उत्तरा-  
र्धाचें पहिलें पद, आणि

$$\begin{aligned} \therefore अ_१ &= अ + नउ, उ=उ, न=न, \\ \therefore स &= \frac{n}{2} (२अ_१ + (न-१)उ) = \frac{n}{2} \{ २(अ+नउ) + (न-१)उ \} \\ &= \frac{n}{2} (२अ + २नउ + नउ - उ) = \frac{n}{2} (२अ + ३नउ - उ) \\ &= २न पदांचे उत्तरार्धाचें सर्वधन . \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\text{आतां ३न पदांचें सर्वधन काढावयाचें,} \\ &\text{अ=अ, उ=उ, न}_१=३न, \\ \therefore स_१ &= \frac{n}{2} \{ २अ + (न_१-१)उ \} = \frac{३न}{२} \{ २अ + (३न-१)उ \}, \\ &= \frac{३न}{२} (२अ + ३नउ - उ), \\ \therefore \frac{n}{२} (२अ + ३नउ - उ) &= ३न पदांच्या सर्वधनाचा \frac{१}{३}. \\ \therefore २न पदांचें उत्तरार्ध &= ३न पदांच्या सर्वधनाचा \frac{१}{३} . \end{aligned}$$

१०. जर,  $क्ष + (क्ष+१) + (क्ष+२) + \dots + ९$  पदांपर्यंत = ५०१,  
तर क्षची किंमत काढ .

क्ष=ज्ञ-४ धर, तर ती श्रेणी अशी होते

$$\begin{aligned}
 & (\text{ज्ञ}-४)^२ + (\text{ज्ञ}-३)^२ + (\text{ज्ञ}-२)^२ + (\text{ज्ञ}-१)^२ + \text{ज्ञ}^२ \\
 & + (\text{ज्ञ}+१)^२ + (\text{ज्ञ}+२)^२ + (\text{ज्ञ}+३)^२ + (\text{ज्ञ}+४)^२ = ५०१, \\
 & २ \text{ज्ञ}^२ + ३२ + २ \text{ज्ञ}^२ + १८ + २ \text{ज्ञ}^२ + ८ + २ \text{ज्ञ}^२ + २ + \text{ज्ञ}^२ = ५०१, \\
 & ९ \text{ज्ञ}^२ + ६० = ५०१, \quad ९ \text{ज्ञ}^२ = ४४१, \quad ३ \text{ज्ञ} = २१, \\
 & \therefore \text{ज्ञ} = ७, \quad \therefore \text{क्ष} = \text{ज्ञ} - ४ = ३.
 \end{aligned}$$

११. गणितप्रमाणांत अशा तीन संख्या काढ, कीं  
ज्यांची बेरीज ३० येईल, आणि ज्यांच्या वर्गांची बेरीज  
३०८ येईल.

क्ष-य, क्ष, क्ष+य, हीं पदे त्या तीन संख्या दाखविण्यास घे,  
तर क्ष-य+क्ष+क्ष+य=३०, म्हणजे ३क्ष=३०,  $\therefore$  क्ष=१०,  
क्ष<sup>२</sup>-२क्षय+य<sup>२</sup>+ क्ष<sup>२</sup>+क्ष<sup>२</sup>+२क्षय+य<sup>२</sup>=३०८,  
३क्ष<sup>२</sup>+२य<sup>२</sup>=३०८, २य<sup>२</sup>=३०८-३क्ष<sup>२</sup>=३०८-३००=८,  
 $\therefore$  य<sup>२</sup>=४, य=२=उत्तर,

$$\left. \begin{aligned}
 \text{म्हणून क्ष-य} &= १०-२=८. \\
 \text{क्ष} &= १० = १०. \\
 \text{क्ष+य} &= १०+२=१२.
 \end{aligned} \right\} \text{उत्तर.}$$

१२. गणितप्रमाणांत अशा चार संख्या काढ कीं  
ज्यांची बेरीज २४, आणि गुणाकार ९४५ होईल.

क्ष-३य, क्ष-य, क्ष+य, क्ष+३य, ह्या त्या

चार संख्या ये,

तर त्यांची बेरीज  $४९ = २४$ ,  $\therefore ९ = ६$ ,  
त्यांचा गुणाकार  $(९-३)(९+३)(९-१)(९+१) = ९४५$ .

$$\therefore (९-९)(९+९) = ९४५,$$

$\therefore ९-९ = ९+९ = ९४५$ ; ह्यांत  $९$  ची किंमत मात्ल्याने,

$$१२९६ - ३६० = ९४५,$$

$$९-३ = ९+१ = ९, \therefore ९ = ९.$$

$$\text{म्हणून } ९-३ = ६-३ = ३.$$

$$९-१ = ६-१ = ५.$$

$$९+१ = ६+१ = ७.$$

$$९+३ = ६+३ = ९.$$

उत्तर

## उदाहरणे.

१.  $१+२+३+४+५$  न पर्यंत पदांचे श्रेढीचे सर्व-  
धन काढ. उत्तर.  $\frac{१}{२}n(n+१)$ .

२.  $९+१५+२१+२७$ ,  $१०$  पदांपर्यंत पदांची बेरीज  
काढ. उत्तर.  $१६०$ .

३.  $\frac{१}{२} + \frac{१}{३} + \frac{१}{४} + \frac{१}{५}$ ,  $२०$  पदांच्या श्रेढीचे सर्व-

धन, आणि २०वें पद काढ.

उत्तर. -  $२१\frac{३}{४}$ , आणि  $-२\frac{३}{४}$ .

४.  $१ + ८ + १५ + ३०, १००$  पदांची बेरीज  $= ३४७५०$ .

५.  $\frac{१}{३} + \frac{१}{४} + \frac{१}{५} + ३०, १२$  पदांची बेरीज  $= -१\frac{१}{३}$ .

६. ७,  $५\frac{१}{३}$ , ४, ३०, पदांचे श्रेढीचें ९वें पद  $= -१$ .

७.  $\frac{७}{१२} + \frac{३}{४} + \frac{१}{४} + ३०, २४$  पदांच्या श्रेढीचें सर्व-  
धन, आणि २४ वें पद काढ.

उत्तर. ३७, आणि  $२\frac{१}{२}$ .

८. जीत अ  $= ३$ , ल  $= १७$ , न  $= २९$ , ती श्रेढी काढ.

उत्तर. ३,  $३\frac{१}{२}$ , ४,  $४\frac{१}{२}$ , ५०.

९. १, ९, १७, २५, ३०, पदांचे श्रेढीचें १००वें पद  $= ७९३$ .

१०.  $\frac{१}{२} + \frac{३}{४} + १ + ३०, १९$  पदांची बेरीज  $= १६\frac{१}{४}$ .

११. १९८, १९३, १८८, ३०, ४० पदांच्या श्रे-  
ढीचें सर्वधन काढ. उत्तर. ४०२०.

१२.  $\frac{१}{२}, \frac{१}{६}, -\frac{१}{६}$ . ३० पदांचे श्रेढीचें २०वें पद  $= -५\frac{५}{६}$ .

१३.  $\frac{१}{२} - \frac{३}{४} - \frac{११}{६} - ३०, १३$  पदांच्या श्रेढीचें सर्वधन

काढ.

उत्तर.  $-८४\frac{१}{२}$ .

१४.  $\frac{1}{6} + 1\frac{2}{6} + 30$ , न पदांच्या श्रेढीचें सर्वधन काढ. उत्तर.  $\frac{1}{6} (2n+3)$ .

१५. १९ आणि ३५ ह्यांच्या मध्ये तीन गणित प्रमाणें, आणि  $2\frac{2}{3}$  आणि  $\frac{2}{3}$  ह्यांच्या मध्ये पांच गणित प्रमाणें काढ.

उत्तर. २३, २७, ३१; आणि  $2\frac{1}{3}$ , २,  $1\frac{2}{3}$ ,  $1\frac{1}{3}$ , १.

१६. जर  $s=40$ ,  $a=7$ ,  $u=2$ , तर  $n$  काय?

उत्तर.  $n=8$ , किंवा  $-90$ .

१७. एका गणितश्रेढीतील पहिल्या पदापासून पंधरा पदांची बेरीज ६००, आणि उत्तर. ५ आहे; तर तींतील पहिलें पद काढ. उत्तर. ५.

१८. एका गणितश्रेढीतील पहिलें पद ३ आहे, आणि पहिल्यापासून दहा पदांची बेरीज १६५ आहे; तर ती श्रेढी कोणती आहे?

उत्तर. ३, ६, ९, ३०.

१९.  $2\frac{1}{2}$  आणि  $6\frac{1}{2}$  ह्यांच्या मध्ये चार गणित प्रमाणें घाल. उत्तर.  $3\frac{1}{2}$ , ४,  $4\frac{1}{2}$ ,  $5\frac{1}{2}$ .

२०. एका श्रेढीतील पहिल्यापासून ९ पदांची बेरीज ० आहे, आणि शेवटील पद  $-\frac{2}{3}$  आहे; तर

ती श्रेढी कोणती आहे? उत्तर.  $\frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} +$  इत्यादि.

२१. -१ आणि १५ ह्यांच्या मध्ये तीन गणितप्रमाणे घाल.  
उत्तर. ३, ७, आणि ११.

२२. एका गणितश्रेढीचे सर्वभूत  $६\frac{७}{८}$ , पहिले पद  $१\frac{१}{८}$ .  
आणि उत्तर- $\frac{१}{८}$  आहे; तर त्या श्रेढीचा गच्छ काय  
आहे? उत्तर. १०.

२३. एका गणितश्रेढीतील तिसरे पद ७ आहे, आणि साहाचे पद १६ आहे. तर ती श्रेढी कोणती आहे?

उत्तर. १, ४, ७, १०, १३.

२४. १ आणि ३१ ह्यांच्या मध्ये ११ गणितप्रमाणे आहेत, आणि (११-१) ह्या मध्यप्रमाणाच्या  $\frac{१}{११}$  बराबर ७वे पद आहे; तर ती मध्यप्रमाणे किती आहेत?

उत्तर. १४.

२५. गणितप्रमाणांत अशा तीन संख्या काढू की ज्यांची बेरीज १० आहे, आणि दुसऱ्या संख्येचा आणि तिसऱ्या संख्येचा गुणाकार  $३३\frac{१}{३}$  आहे

उत्तर. - $३\frac{१}{३}$ ,  $३\frac{१}{३}$ , १०

२६. गणितप्रमाणांत अशा तीन संख्या काढू, की ज्यांची बेरीज ११ आहे, आणि ज्यांच्या वर्गांची बेरीज ९१



आहे.

उत्तर. २, ५, ८

२७.  $\frac{क्ष^3-1}{क्ष} + क्ष + \frac{क्ष^3+1}{क्ष} + इ०$  न पदांच्या श्रेढीचे सर्वधन आणि नवे पद काढ.

उत्तर.  $नक्ष + \frac{1}{2}न(न-३)\frac{1}{क्ष}$ , आणि  $क्ष + (न-२)\frac{1}{क्ष}$

२८. गणितप्रमाणांत अशा तीन संख्या काढ, की ज्यांची बेरीज २४ आहे, आणि गुणाकार ४८० आहे.

उत्तर. ६, ८, १०.

२९. ज्या श्रेढीचे पहिले पद  $न^2-न+१$  आहे, आणि उत्तर २ आहे, त्या श्रेढीच्या न पदांची बेरीज काढ.

उत्तर.  $न^3$ .

३०. गणितप्रमाणांत अशा चार संख्या काढ, की ज्यांनील आद्यंतपदांचा गुणाकार २७ होईल, आणि मध्यपदांचा गुणाकार ३५ होईल.

उत्तर. ३, ५, ७, ९.

३१. ज्या गणितश्रेढीचे नवे पद आणि मवे पद अनुक्रमे म आणि न आहेत, तर तिच्या ज्या पदांची बेरीज  $\frac{1}{2}(म+न) \cdot (म+न-१)$  आहे, त्या पदांची संख्या आणि तिचे शेवटील पद काढ.

उत्तर. म०न, किंवा म०न-१; आणि ०, किंवा १.

३२. कोणी एका गृहस्थाच्या दृष्टीस असें पडलें, कीं एक आगबोट पहिल्या सेकंदांत ४ फूट जाते आणि ६० व्या सेकंदांत ८८ फूट जाते; तर दर एक सेकंदांत तिची गति एकसारखीच वाढत आहे असें मानल्यास ती पहिल्या मिनिटांत किती फूट लांब जाईल?

उत्तर. २७६० फूट

३३. पाठीमागलेंच उदाहरण घेऊन, त्या आगबोटीची गति कोणत्या संख्येनें एकसारखी वाढत होती ती, आणि तिला पहिला मेल जावयास किती वेळ लागला तो काढ.

उत्तर.  $9\frac{3}{4}$  फूट; आणि सुमारे,  $6\frac{3}{4}$  सेकंद.

३४. एका गणितश्रेढीचा गच्छ उत्तराच्या अर्धा बराबर आहे, शेवटचें पद पहिल्या पदाच्या चौपट आहे, आणि सर्वधन पहिल्या पदाच्या वर्गाच्या  $\frac{1}{2}$  वां बरोबर आहे; तर ती श्रेढी काढ.

उत्तर. २०, ३२, ४४, ५६, ६८, ८०.

३५. कोणी एका गांवाहून अ दुसरे गांवीं जावयास निघाला, आणि तो पहिल्या दिवशीं ६ मैल

दुसरे दिवशीं २१ क्षमैल, तिसरे दिवशीं ३१ क्षमैल, ह्याप्रमाणें चालत गेला; ४ दिवसांनीं त्याच गांवाहून त्यास गांठावयास व निघाला, तो दररोज ९ क्षमैल चालला; तर त्यास अला गांठावयास किती दिवस लागले ?

उत्तर . ४ दिवस .

३६. कांहीं मनुष्यांनीं मिळून ३४५ पोंडांस एक दोन खरेदी केलें, त्यांत जो मनुष्य वयानें लहान होता त्यानें जितका पैसा दिला त्याहून ५ पोंड अधिक इतका त्यापेक्षां जो बडाल होता त्यानें दिला, आणि ह्याच प्रमाणें बाकीचे मनुष्य गणित प्रमाणानें पैसा देत गेले. नंतर कनिष्ठमंडळीनें (म्हणजे सर्वांहून जो वयानें लहान त्यापासून सर्व मनुष्यसंख्येचें अर्ध इतक्या मनुष्यांनीं) आपल्या पैक्याचे किमतीचें शेत तोडून घेतलें, आणि आपआपली वर्गणी सारखी करून आपापणात तें शेत सारखें वांटून घ्यावें असा त्यांनीं ठराव केला, तेव्हां एकेकावर २२ पोंड वर्गणी आली; तर दोन खरेदी केलें तेव्हां एकंदर मनुष्ये किती होती ?

उत्तर १० मनुष्ये .

३७. एका गणितश्रेढींतील  $n+1$  पदांची बेरीज  $(1+n) \cdot (1\frac{1}{2}+n)$  आहे, तर तींतील नवें पद काढ.

उत्तर.  $2(n-\frac{1}{2})$ .

३८. एका गणितश्रेढींतील  $n$  पदांची बेरीज  $p+n^2$  आहे, तर तींतील  $m$  वें पद काढ.

उत्तर.  $p+(2m-1)k$ .

३९. एका गणितश्रेढींतील  $n$  पदांची बेरीज  $\frac{n}{2}(n+1)$  आहे, तर ती श्रेढी काढ.

उत्तर.  $\frac{1}{2}, 1, 1\frac{1}{2}, 2, 2\frac{1}{2}, 3, \dots$

४०. एका गणितश्रेढींतील  $p$  वें पद  $a$ ,  $k$  वें पद  $b$ , आणि  $r$  वें पद  $c$  आहे; तर  $a, b, c$  आणि  $k$  यांचे मध्ये परस्पर काय संबंध आहे?

उत्तर.  $(k-r)a + (r-p)b + (p-k)c = 0$ .

## भूमितिश्रेढी.

(२३). ज्या श्रेढींतील पदे एकाच गुणोत्तराने चढतात किंवा उतरतात, त्या श्रेणीस भूमितिश्रेढी म्हणतात. जसे १, ३, ९, २७, ८१ ही भूमितिश्रेढी आहे, हींतील गुणोत्तर ३ आहे; आणि

$\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{32}, \dots$  हीही भूमितिश्रेढी आहे ,  
हींतील गुणोत्तर  $\frac{1}{2}$  आहे . श्रेढींतील कोणत्या एका  
पदाम त्याच्याच मागल्या पदानें भागिलें असतां गु-  
णोत्तर निघतें .

सिद्धांत . भूमितिश्रेढीचें नवें पद आणि सर्व-  
धन काढायचें .

पहिलें पद दाखवायाम अ , नवें पद दाख-  
वायाम ल , गुणोत्तर दाखवायाम र . आणि सर्वधन  
दाखवायाम स घे , तर ती भूमितिश्रेढी अशी होईल

अ , अर , अर<sup>२</sup> , अर<sup>३</sup> ; ... अर <sup>$n-२$</sup>  , अर <sup>$n-१$</sup>  ,  
आणि ह्यावरून हें उघड आहे कीं नवें पद ल = अर <sup>$n-१$</sup>  ,

आता , स = अ + अर + अर<sup>२</sup> + ... + अर <sup>$n-२$</sup>  + अर <sup>$n-१$</sup>  ,

∴ सर = अर + अर<sup>२</sup> + ... + अर <sup>$n-२$</sup>  + अर <sup>$n-१$</sup>  + अर <sup>$n$</sup>  ,

∴ वजाबाकी केल्यानें , सर - स = अर <sup>$n$</sup>  - अ ,

म्हणजे , स(र-१) = अ(र <sup>$n$</sup> -१) ,

$$\therefore स = अ \frac{(र^n - १)}{र - १}$$

कुर०१. ∴ स =  $\frac{अ^n - अ}{r-1}$ , आणि रल =  $अ^n$ , ∴ स =  $\frac{रल - अ}{r-1}$ .

कुर०२. ∴ स =  $\frac{अ^n}{r-1} - \frac{अ}{r-1}$ , आणि जर र समअपूर्णांक आहे, तर जसजसा न वाढत जाईल, तसतशी  $र^n$  ची किंमत कमी होत जाईल, आणि जेव्हा न अनिशयितच वाढेल, तेव्हा  $र^n$  कोणत्याही कमी किंमतीचे पदाहून कमी होईल. ∴  $\frac{अ^n}{r-1}$  हे पद न घेतलं तरी चालेल, आणि मग  $-\frac{अ}{r-1}$  किंवा  $\frac{अ}{r-1}$  हे पद श्रेढीची मर्यादा दारवतील.

म्हणून, जेव्हा र समअपूर्णांक आहे आणि श्रेढी अनिशयितच वाढविली आहे, तेव्हा स =  $\frac{अ}{r-1}$ .

दोन पदांचे भूमितिमध्यप्रमाण = त्यांच्या गुणाकाराचें वर्गमूळ म्हणजे, जर अ, म, ब, हीं पदे भूमितिप्रमाणात आहेत, तर  $\frac{म}{अ} = \frac{ब}{म}$ , ∴ म = अब, ∴ म =  $\sqrt{अब}$ .

## उदाहरणे.

१. १, २, ४, ८ इ०, १२ पदांच्या श्रेढीचें सर्वधनकाद.

येथें अ = १, र = २, न = १२,

$$\therefore स = अ \frac{r^n - 1}{r - 1} = १ \cdot \frac{2^{12} - 1}{2 - 1} = ४०९६ - १ = ४०९५.$$

२. ६५६१, २१८७, ७२९, ३०, ६ पदांच्या श्रेढीचे सर्वधन काढ .

येथे  $a = ६५६१$ ,  $r = \frac{१}{३}$ ,  $n = ६$ ,

$$\begin{aligned} \therefore S &= a \cdot \frac{r^n - 1}{r - 1} = a \cdot \frac{\left(\frac{१}{३}\right)^6 - 1}{\frac{१}{३} - 1} = a \cdot \frac{\frac{१}{३^6} - 1}{\frac{१}{३} - 1}, \\ &= a \cdot \frac{१ - ७२९}{२४३ - ७२९} = a \cdot \frac{-७२८}{-४८६} = ६५६१ \times \frac{३६४}{२४३}, \\ &= २७ \times ३६४ = ९८२८. \end{aligned}$$

३.  $\frac{३}{५} - \frac{१}{५} + \frac{१}{५} - ३०$ , अनंत पदांच्या श्रेढीचे सर्वधन काढ .

येथे  $a = \frac{३}{५}$ ,  $r = -\frac{१}{३}$ ,

$$\therefore S = \frac{a}{1-r} = \frac{\frac{३}{५}}{1+\frac{१}{३}} = \frac{४}{६+\frac{३}{३}} = \frac{४}{९}.$$

४.  $\frac{१}{३}$  आणि ८१ ह्यांच्या मध्ये चार भूमितिप्रमाणे घाल .

येथे २ आद्यंतपदे आणि ४ मध्यपदे मिळून एकंदर ६ पदे आहेत;

$$a = \frac{१}{३}, l = ८१, n = ६,$$

आतां ल=अर<sup>१</sup>,  $\therefore ८१ = \frac{१}{३} र^१$ ,  $र^१ = २४३ = ३^५$ ,  $\therefore र = ३$ ;

$\therefore \frac{१}{३} \times ३ = १$ ,  $१ \times ३ = ३$ ,  $३ \times ३ = ९$ ,  $९ \times ३ = २७$ ,

आणि  $\therefore १, ३, ९, २७$  हीं मध्यप्रमाणे आहेत.

५. अ आणि ब ह्या दोन पदांचे गणितमध्यप्रमाण जर त्यांचे भूमितिमध्यप्रमाणाचे दुषट आहे, तर

असें सिद्ध करकीं  $\frac{अ}{ब} = \frac{२+\sqrt{३}}{२-\sqrt{३}}$ .

$\frac{अ+ब}{२} =$  गणितमध्यप्रमाण,  $\sqrt{अब} =$  भूमितिमध्यप्रमाण;

आतां  $\frac{अ+ब}{२} = २\sqrt{अब}$ ,  $\therefore अ+ब = ४\sqrt{अ}\sqrt{ब}$ ,

$\frac{\sqrt{अ}}{\sqrt{ब}} + \frac{\sqrt{ब}}{\sqrt{अ}} = ४$ ,  $\therefore \frac{अ}{ब} + २ + \frac{ब}{अ} = १६$ ,  $\frac{अ}{ब} - २ + \frac{ब}{अ} = १२$ .

$\left. \begin{array}{l} \frac{\sqrt{अ}}{\sqrt{ब}} - \frac{\sqrt{ब}}{\sqrt{अ}} = २\sqrt{३} \\ \frac{\sqrt{अ}}{\sqrt{ब}} + \frac{\sqrt{ब}}{\sqrt{अ}} = ४ \end{array} \right\} \therefore \begin{array}{l} २ \frac{\sqrt{अ}}{\sqrt{ब}} = ४ + २\sqrt{३} \\ २ \frac{\sqrt{ब}}{\sqrt{अ}} = ४ - २\sqrt{३} \end{array}$

$\frac{\sqrt{अ}}{\sqrt{ब}} = २ + \sqrt{३}$ ,  $\frac{\sqrt{ब}}{\sqrt{अ}} = २ - \sqrt{३}$ ,

$\therefore \frac{\sqrt{अ}}{\sqrt{ब}} \div \frac{\sqrt{ब}}{\sqrt{अ}} = \frac{अ}{ब} = \frac{२+\sqrt{३}}{२-\sqrt{३}}$ .



६. एका अनंतपदांचे श्रेढीचे सर्वधन २ आहे,  
आणि त्याच श्रेढीच्या पदांच्या वर्गांची बेरीज  $\frac{४}{३}$   
आहे; तर अ आणि र काढ.

$$अ + अर + अर^२ + अर^३ + इ० = \frac{अ}{१-र} = २ \dots (१)$$

$$अ^२ + अर^२ + अर^४ + अर^६ + इ० = \frac{अ^२}{१-र^२} = \frac{४}{३} \dots (२)$$

(२) ह्यास (१) ह्यानें भागल्यानें,  $\frac{अ}{१+र} = \frac{२}{३}$ ,  $\therefore अ = \frac{२}{३}(१+र)$

(१) अ =  $२(१-र)$ ; आणि ह्या अच्या किंमतीचें समी-  
करण केल्यानें,

$$\frac{२}{३}(१+र) = २(१-र), १+र = ३-३र,$$

$$४र = २, \therefore र = \frac{१}{२}, \text{ आणि } अ = २-२र = २-१ = १.$$

७. जर  $१+र+र^२+र^३+इ०$  अनंत = स,  $\left\{ \begin{array}{l} \text{तर असें} \\ \text{आणि } १+न+न^२+न^३+इ० \dots = स, \end{array} \right\}$  सिद्ध कर कीं,

$$१+रन+रन^२+रन^३+इ० \dots = \frac{सस}{स+स१}$$

$$\text{आतां, } १+रन+रन^२+इ० = \frac{१}{१-रन},$$

$$स = \frac{१}{१-र}, \text{ आणि } स१ = \frac{१}{१-न}, \therefore स-सर = १, स१-स१न = १,$$

$$\text{सर} = \text{स} - १, \text{स, न} = \text{स} - १, \therefore \text{र} = १ - \frac{१}{\text{स}}, \text{न} = १ - \frac{१}{\text{स}},$$

$$\therefore \text{रन} = १ - \frac{१}{\text{स}} - \frac{१}{\text{स}} + \frac{१}{\text{सस}}, \therefore १ - \text{रन} = \frac{१}{\text{स}} + \frac{१}{\text{स}} - \frac{१}{\text{सस}},$$

$$\text{मूणून } १ + \text{रन} + \text{रनै} + \text{इ०} = \frac{१}{\frac{१}{\text{स}} + \frac{१}{\text{स}} - \frac{१}{\text{सस}}} = \frac{\text{सस}}{\text{स} + \text{स} - १}.$$

$$\therefore \text{असें सिद्ध कर कीं } ४ \cdot ५२१२१२१ \text{ इ०} = ४ \frac{८६}{१६५}.$$

$$\text{आतां, } ४ \cdot ५२१२१२१ \text{ इ०} = ४ + \frac{५}{१०} + \frac{२१}{१०००} + \frac{२१}{१०००००} + \text{इ०},$$

$$\text{परंतु } \frac{२१}{१००००} + \frac{२१}{१००००००} + \frac{२१}{१००००००००} + \text{इत्यादि} = \frac{\frac{२१}{१०००}}{१ - \frac{१}{१००}},$$

$$= \frac{\frac{२१}{१००० - १०}}{१} = \frac{२१}{९९०} = \frac{७}{३३०},$$

$$\therefore ४ \cdot ५२१२१२१ \text{ इ०} = \frac{४५}{१०} + \frac{७}{३३०} = \frac{१४९२}{३३०} = ४ \frac{८६}{१६५}.$$

$$९. \text{अ} - (\text{अ} + \text{उ})\text{क्ष} + (\text{अ} + २\text{उ})\text{क्ष} - (\text{अ} + ३\text{उ})\text{क्ष} + \text{इत्या०},$$

अनंत पदांचे श्रेढीचें सर्वधन काढ.

$$\text{स} = \text{अ} - \text{अक्ष} - \text{उक्ष} + \text{अक्ष} + २\text{उक्ष} - \text{अक्ष} - ३\text{उक्ष} + \text{इ०},$$

$$\text{सक्ष} = \text{अक्ष} - \text{अक्ष} - \text{उक्ष} + \text{अक्ष} + २\text{उक्ष} - \text{अक्ष} - ३\text{उक्ष} + \text{इ०},$$

$$\therefore \text{स} + \text{सक्ष} = \text{अ} - \text{उक्ष} + \text{उक्ष} - \text{उक्ष} + \text{उक्ष} - \text{उक्ष} + \text{इत्या०},$$

$$\text{मूणजे, } (१ + \text{क्ष})\text{स} = \text{अ} - \text{उ}(\text{क्ष} - \text{क्ष} + \text{क्ष} - \text{इ०}) = \text{अ} - \text{उ} \times \frac{\text{क्ष}}{१ + \text{क्ष}},$$

$$\therefore s = \frac{a}{1+r} - \frac{ar^n}{(1+r)^n} = \frac{a + (a-r^n)r^n}{(1+r)^n}.$$

१०. जर एका भूमिति श्रेढीत न पदांचा गुणाकार प, बेरीज स, आणि व्युत्क्रमांची बेरीज स, आहे; तर असें सिद्ध कर कीं  $p^2 = \left(\frac{s}{s_1}\right)^n$ .

१ ली श्रेढी,

$$s = a + ar + ar^2 + ar^3 + \dots + ar^{n-1} = a \cdot \frac{r^n - 1}{r - 1},$$

२री श्रेढी.

$$s_1 = \frac{a}{r} + \frac{ar}{r^2} + \frac{ar^2}{r^3} + \frac{ar^3}{r^4} + \dots + \frac{ar^{n-1}}{r^n} = \frac{a}{r} \cdot \frac{\left(\frac{1}{r}\right)^n - 1}{\frac{1}{r} - 1}$$

$$= \frac{a}{r} \cdot \frac{1 - r^n}{r^{n-1} - r^n} = \frac{1}{ar^{n-1}} \cdot \frac{1 - r^n}{1 - r} = \frac{1}{ar^{n-1}} \cdot \frac{r^n - 1}{r - 1},$$

$$\therefore \frac{s}{s_1} = ar^{n-1}, \quad \left(\frac{s}{s_1}\right)^n = a^n r^{n(n-1)};$$

$$\text{आतां } p = a \cdot ar + ar^2 + \dots + ar^{n-1} = a \cdot r^{1+2+\dots+(n-1)},$$

$1+2+3+\dots+(n-1)$  ह्या गणितश्रेढीचें सर्वधन काढ.

$$s = \frac{n}{2} \{2a + (n-1)r\} = \frac{n-1}{2} \{a + (n-2)r\} = \frac{n(n-1)}{2},$$

$$\therefore p = ar^{\frac{n(n-1)}{2}}, \quad p^2 = a^2 r^{n(n-1)}$$

$$\therefore p^2 = \left( \frac{s}{s_1} \right)^n$$

११. अशा दोन संख्या काढ, की ज्यांची घजाबाकी

१२ होईल, आणि ज्यांचें गणितमध्यप्रमाण : भूवितिमध्य  
प्रमाणास :: ५ : ४.

मोठी संख्या = क्ष, धाकटी संख्या = य, तर क्ष-य = १२,

$\frac{\text{क्ष} + \text{य}}{२} = \text{गणितमध्यप्रमाण}, \sqrt{\text{क्षय}} = \text{भूवितिमध्यप्रमाण},$

$\frac{\text{क्ष} + \text{य}}{२} : \sqrt{\text{क्षय}} :: ५ : ४, \text{क्ष} + \text{य} : २\sqrt{\text{क्षय}} :: ५ : ४,$

(कल० २० प्र०)  $\text{क्ष} + २\sqrt{\text{क्षय}} + \text{य} : \text{क्ष} - २\sqrt{\text{क्षय}} + \text{य} :: ९ : १,$

$\sqrt{\text{क्ष}} + \sqrt{\text{य}} : \sqrt{\text{क्ष}} - \sqrt{\text{य}} :: ३ : १,$

$२\sqrt{\text{क्ष}} : २\sqrt{\text{य}} :: ४ : २,$

$\sqrt{\text{क्ष}} : \sqrt{\text{य}} :: २ : १, \text{क्ष} : \text{य} :: ४ : १,$

$\therefore \text{क्ष} = ४\text{य}, ४\text{य} - \text{य} = १२, ३\text{य} = १२,$

$\therefore \text{य} = ४, \text{क्ष} = १६.$

१२. जर  $s = १ + \frac{१}{२} + \frac{१}{४} + \frac{१}{८} + \dots$ , अनंतपदांपर्यंत,

आणि  $s_1 = १ - \frac{१}{२} + \frac{१}{४} - \frac{१}{८} + \dots$ , ... ;

तर असे सिद्ध कर की  $s : s_1 :: ३ : १$ .

$$\left. \begin{aligned} \text{स} &= 1 + \frac{3}{2} + \frac{5}{4} + \frac{7}{8} + \frac{9}{16} + 10 \\ \frac{\text{स}}{2} &= \frac{1}{2} + \frac{3}{4} + \frac{5}{8} + \frac{7}{16} + 10 \end{aligned} \right\} \text{वजाबाकी घे.}$$

$$\frac{\text{स}}{2} = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + 10 = 2 + \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 2 + 1 = 3,$$

$$\therefore \text{स} = 6;$$

$$\left. \begin{aligned} \text{स}_1 &= 1 - \frac{3}{2} + \frac{5}{4} - \frac{7}{8} + \frac{9}{16} - 10 \\ \frac{\text{स}_1}{2} &= \frac{1}{2} - \frac{3}{4} + \frac{5}{8} - \frac{7}{16} + 10 \end{aligned} \right\} \text{बेरीज घे.}$$

$$\therefore \frac{\text{स}_1}{2} = 1 - 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{8} - \frac{1}{16} + 10 = \frac{1}{1 - (-\frac{1}{2})} = \frac{1}{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3},$$

$$\therefore \text{स}_1 = \frac{4}{3};$$

$$\therefore \text{स} : \text{स}_1 :: 6 : \frac{4}{3}, :: 3 : \frac{2}{3}, :: 27 : 9.$$

१३. एका भांड्यांत १० शेर दूध होतें, त्यांतून एक शेर दूध काढून त्यांत एक शेर पाणी ओतलें; पुनः त्या मिश्रणांतून एक शेर दूध काढून एक शेर पाणी ओतलें; आतां ह्या प्रमाणें दाहावेळां केलें; तर प्रत्येक वेळां दूध आणि पाणी ह्यांचें चांगलें मिश्रण होतें असें

मानून, शेरबटीं त्यांत वास्तविक दूध किती शेर राहिलें?

प्रथमतः १० शेर दूध होतें,

$\frac{१}{१०}$  शेर दूध काढलें,

मग ९ शेर दूध बाकी राहिलें,

आणि १ शेर पाणी त्यांत ओतलें;

$\frac{१}{१०}$  शेर दूध काढलें,

$९ - \frac{१}{१०} = \frac{८९}{१०}$  शेर दूध त्या भांड्यांत शिल्लक राहिलें,

आणि  $\frac{१९}{१०}$  शेर पाणी त्यांत उरलें;

$\frac{८९}{१००}$  शेर दूध काढलें .

$\therefore १ + \frac{१}{१०} + \frac{८९}{१००} + इ०$  दाहापदे = जितके शेर दूध काढले ते,

येथें  $अ = १$ ,  $र = \frac{१}{१०}$ ,  $न = १०$ ,

$$\therefore स = अ \frac{न}{र-१} = \frac{\left(\frac{१}{१०}\right)^{१०} - १}{\frac{१}{१०} - १} = \frac{१ - १०^{-१०}}{१ - १०^{-१}} = \frac{१ - ०.०००००००००००१}{१ - ०.१},$$

$$= \frac{०.९९९९९९९९९९९९}{०.९} = १.११११११११११११ = \text{काढलेलें दूध.}$$

$$\therefore १० - १.११११११११११११ = ८.८८८८८८८८८८८९,$$

= शिल्लक राहिलेलें दूध .

१४. भूमिति प्रमाणांत अशा तीन संख्या काढ, कीं

ज्यांची बेरीज ७ आहे, आणि ज्यांच्या व्युत्क्रमानांची बेरीज  $\frac{७}{४}$  आहे.

पहिली संख्या =  $\frac{१५}{४}$ , आणि गुणोत्तर = य घे ,

तर  $\frac{१५}{४} + १ + १ = ७$ , आणि  $\frac{४}{१५} + \frac{१}{१} + \frac{१}{१} = \frac{७}{४}$ ,

$$\left. \begin{array}{l} \frac{१}{४} + १ + १ = \frac{७}{१५} \\ १ + १ + \frac{१}{४} = \frac{७}{४} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \therefore \frac{७}{४} १ = \frac{७}{१५} \\ १ = ४, \therefore १ = २. \end{array}$$

$$\therefore १ + १ + \frac{१}{४} = \frac{७}{२}, \quad १ - \frac{१}{२} = -\frac{१}{२},$$

$$१ - \frac{१}{२} १ = -१, \quad १ - \frac{१}{२} १ + \frac{१}{४} = -१ + \frac{१}{४} = -\frac{३}{४},$$

$$१ - \frac{१}{४} = \pm \frac{३}{४} \therefore १ = \frac{१ \pm ३}{४} = २;$$

$\therefore १, २, ४$  ह्या त्या तीन संख्या.

१५. भूमिति प्रमाणांत अशा चार संख्या काढ, कीं ज्यांची बेरीज ४० आहे, आणि ज्यांच्या वर्गांची बेरीज ८२० आहे.

त्या चार संख्या दाखवावयास १, २, ३, ४, घे,  
तर  $१ + २ + ३ + ४ = १०$ ,  $\therefore १(१ + २ + ३ + ४) = १०$   
आणि  $१^२ + २^२ + ३^२ + ४^२ = ३०$ ,  $\therefore १(१^२ + २^२ + ३^२ + ४^२) = ३०$

$$\therefore \text{क्ष}\{1+y+y(1+y)\} = ४०, \text{क्ष}(1+y)(1+y) = ४०, (१)$$

$$\text{क्ष}\{1+y+y(1+y)\} = ८२०, \text{क्ष}(1+y)(1+y) = ८२०, (२)$$

(१) ह्याचा वर्ग करून त्यास (२) ह्यानें भागल्यानें,

$$\frac{\text{क्ष}(1+y)^2(1+y)^2}{\text{क्ष}(1+y)(1+y)} = \frac{१६००}{८२०}, \frac{(1+y)^2(1+y)}{1+y} = \frac{८०}{४१},$$

ह्याचे छेद सोडवून गुणाकारादि केल्यानें,

$$y + \frac{१}{y} - \frac{८०}{४१}(y + \frac{१}{y}) = \frac{८०}{४१},$$

म्हणून  $y=३, \therefore \text{क्ष}=१, \therefore १, ३, ९, २७$  ह्या त्याचाग संख्या.

## उदाहरणे.

१.  $३+६+१२+२४$ , ४ पदांची बेरीज  $= ४५$ .

२.  $५+२०+८०+३२०$ , ४ पदांची बेरीज  $= ४२५$ .

३.  $\frac{३}{२}+१+\frac{३}{२}+३$ , ४ पदांची बेरीज  $= ४\frac{१७}{२}$ .

४.  $९, -६, ४, ३०$ , श्रेढीचे ८ वे पद  $= -\frac{१३५}{२}$ .

५.  $३, \frac{१}{२}, \frac{१}{१२}, ३०$ , श्रेढीचे ६ वे पद  $= \frac{१}{२५२}$ .

६.  $१-२+३-४$ , १० पदांची बेरीज  $= -३४$ .

७.  $२१-३+\frac{३}{१०}-३०$ , ५ पदांच्या श्रेढीचे सर्वधर्म



आणि दोबटील पद काढ. उत्तर.  $१८\frac{१३९}{३४३}$ , आणि  $\frac{३}{३४३}$ .

८.  $-\frac{१}{२}, \frac{१}{३}, -\frac{३}{६}, इ०$ , श्रेढीचें ५वें पद  $= -\frac{८}{९}$ .

९.  $\frac{४}{५} + २ + ५ + इ०$ , ह्या श्रेढींतील नवें पद, आणि न पदांची बेरीज काढ.

उत्तर.  $\frac{५-२}{२-३}$ , आणि  $\frac{१}{१५} \left( \frac{५-२}{२-३} \right)$ .

१०.  $\frac{३}{५} + \frac{१}{२} + \frac{५}{१२} + इ०$ , ८ पदांची बेरीज  $= \frac{१२८८९९९}{४६६५६०}$ .

११.  $\frac{१}{४} - \frac{१}{६} + \frac{१}{६४} - इ०$ , श्रेढीची मर्यादा काढ. उत्तर.  $\frac{१}{५}$ .

१२.  $१ - \frac{१}{२} + \frac{१}{४} - इ०$ , श्रेढीची मर्यादा काढ. उत्तर.  $\frac{३}{४}$ .

१३.  $२ - १\frac{१}{३} + \frac{६}{९} - इ०$ , श्रेढीची मर्यादा काढ. उत्तर.  $१\frac{१}{५}$ .

१४.  $-३\frac{१}{५} + १\frac{३}{५} - \frac{४}{५} + इ०$ , श्रेढीची मर्यादा काढ.

उत्तर.  $-२\frac{३}{५}$ .

१५.  $\frac{१}{२}$  आणि  $१२८$  ह्यांचे मधील तीन भूमितिप्रमाणे काढ. उत्तर.  $\pm २, ८, \pm ३२$ .

१६. ५ आणि  $१०८०$  ह्यांचे मधील दोन भूमितिमध्य-प्रमाणे, आणि ९ आणि  $\frac{१}{९}$  ह्यांचे मधील तीन भूमिति-मध्यप्रमाणे काढ. उत्तर.  $३०, १८०, आणि ३, १, \frac{१}{३}$ .

१७. एका अनंतपद भूमितिश्रेढीचें सर्वधन २ आहे, आणि पहिल्या दोन पदांची बेरीज  $१\frac{३}{४}$  आहे; तर ती श्रेढी काढ. उत्तर.  $३ - \frac{३}{४} + \frac{३}{४} -$  इत्यादि.

१८. भूमितिप्रमाणांत अशा तीन संख्या काढ, कीं ज्यांचा गुणाकार  $६४$  आहे, आणि ज्यांच्या घनांची बेरीज  $५८४$  आहे. उत्तर.  $२, ४, ८$ .

१९. जर एका अनंतपदभूमितिश्रेढीचें सर्वधन तिचे न पदांच्या बेरजेच्या दुप्पट आहे, तर असें सिद्ध कर कीं तिचें गुणोत्तर  $= (\frac{१}{२})^n$ .

२०. दोन संख्यांचें गणितमध्यप्रमाण आणि भूमितिमध्यप्रमाण ह्यांची बेरीज  $१३\frac{१}{२}$  आहे, आणि भूमितिमध्यप्रमाण जर गणितमध्यप्रमाणांतून वजा केलें तर  $१\frac{३}{४}$  बाकी राहते; तर त्या दोन संख्या काढ.

उत्तर. ३ आणि १२.

२१. एका शिकारी कुत्र्यापासून एक ससा १०० यार्ड अंतरावर आहे, ते दोघे ही एकाच दिशेस पळतात, आणि कुत्रा ससापेक्षां १०० पट जलद चालतो; तर ससाला गांठावयास कुत्र्यास किती लांब गेलें पाहिजे?

उत्तर.  $१०१\frac{१}{२}$  यार्ड.

२२. एका देशांतील लोक दरसाल भूमितिप्रमाणानें वाढतात, आणि चार वर्षांत त्यांतील लोक १०,००० पा-  
सून १४,६४१ झाले; तर दरसाल ते त्यांच्या कितव्या  
अंशानें वाढले? उत्तर.  $\frac{1}{100}$ .

२३. एका भूमितिश्रेढींत (प+क) वें पद = म, आ-  
णि (प-क) वें पद = न; तर असें सिद्ध कर कीं पवें  
पद =  $\sqrt{मन}$ , आणि क्वें पद =  $म(\frac{न}{क})^{\frac{1}{२}}$ . आणि जर  
पवें पद = प<sub>१</sub>, आणि क्वें पद = क<sub>१</sub>, तर असें सिद्ध  
कर कीं, नवें पद =  $(\frac{प_१^{न-क}}{क_१^{न-प}})^{\frac{१}{प-क}}$

२४. जर  $\frac{मअ+नब}{म+न}$  हें म आणि न ह्यांचें गणित-  
मध्यप्रमाण आहे, आणि अ आणि ब ह्यांचें भूमिति-  
मध्यप्रमाण आहे, तर म आणि न ह्यांच्या किंमती  
अ आणि ब ह्या पदांत आण.

२५. एका अनंत पद भूमितिश्रेढीचे पदांची बे-  
रीज स आहे, आणि तिच्या पदांच्या वर्गांची बेरीज स<sub>१</sub>  
आहे; तर असें सिद्ध कर, कीं तिचे न पदांची बेरीज  
=  $स \left\{ १ - \left( \frac{स_१ - स_१^२}{स_१^२ + स_१} \right)^न \right\}$

---

## गायनश्रेढी.

(२४). ज्या श्रेढीचे पदांचे व्युत्क्रम गणितप्रमाणांत असतात, त्या श्रेढीस गायनश्रेढी म्हणतात.  $\frac{१}{२}, \frac{१}{३}, \frac{१}{४}, \frac{१}{५}$ , इत्यादी हीं पदे गायनश्रेढींत आहेत; कारण ह्यांचे व्युत्क्रम गणितप्रमाणांत आहेत. असेंच  $\frac{३}{२}, \frac{३}{४}, \frac{३}{५}, \frac{३}{६}$ , आणि  $\frac{क}{अ}, \frac{क}{अ+ब}, \frac{क}{अ+२ब}$ , इत्यादी गायनश्रेढींत आहेत.

म्हणून जर एका गायनश्रेढीतील कांहीं पदे दिलीं असतां त्यांपासून ती श्रेढी चालविणें आहे, तर त्यांचे व्युत्क्रम घेऊन त्यांपासून गणितश्रेढी चालवावी आणि मग ह्या श्रेढीतील पदांचे व्युत्क्रम घ्यावे, म्हणजे ते गायनश्रेढीतील पदे होतील; अथवा समच्छेदांच्या रीतीप्रमाणें पदांचे अंदा सम करून छेद गणितप्रमाणानें वाढवावे म्हणजे झालें. उदाहरण,  $२, १\frac{१}{२}, \frac{६}{५}, \frac{३}{२}$ , ह्यांपासून गायनश्रेढीचीं पुढील पदे आणणें झाल्यास  $\frac{३}{२}, \frac{१}{२}, \frac{१}{३}, \frac{१}{४}$ , हीं पदे घेऊन गणितश्रेढीचीं पुढील पदे आणावीं; तीं  $\frac{११}{६}, \frac{१३}{६}, \frac{१५}{६}$ , इत्यादी येतात, म्हणून  $\frac{६}{११}, \frac{६}{१३}, \frac{६}{१५}$ , इत्यादी गायनश्रेढीचीं

पुढील पदे आहेत. अथवा दिलेल्या पदांस भागजा-  
नि अपूर्णाकाचे रूप देऊन नंतर त्यांस समांश करून  
न व छेद गणितप्रमाणाने वाढवून आलेली पदे  $\frac{६}{११}$ ,  
 $\frac{६}{१३}$ ,  $\frac{३}{५}$ , इ. गायनश्रेढीची पुढील पदे आहेत.

### सिद्धान्त.

१. जर तीन पदे गायनप्रमाणांत आहेत, तर  
पहिल्यास जसे तिसरे तशी पहिले आणि तिसरे  
ह्यांची वजाबाकी दुसरे आणि तिसरे ह्यांचे वजाबा-  
कीस आहे.\*

∴ जर अ, ब, क, हीं तीन पदे गायनप्रमाणांत  
आहेत, तर  $\frac{१}{अ}$ ,  $\frac{१}{ब}$ ,  $\frac{१}{क}$ , हीं पदे गणितप्रमाणांत  
आहेत.

$$\therefore (२२क०प्र०) \frac{१}{अ} - \frac{१}{ब} = \frac{१}{ब} - \frac{१}{क}, \quad \frac{ब-अ}{अब} = \frac{क-ब}{बक},$$

$$\therefore \frac{अ}{क} = \frac{अ-ब}{ब-क}, \quad \therefore अ : क :: अ-ब : ब-क.$$

कुर०. ह्यावरून असे सिद्ध होतें, कीं जर कोण-  
ताही तीन पदे वर सांगितलेल्या प्रमाणांत आहेत,

---

\* किती एक पंथकार गायनप्रमाणाचे हेच लक्षण सांगून,  
पदांची उलट गणितप्रमाणांत असते हे मागून सिद्ध करतात.

तर तीं गायनप्रमाणांत आहेत .

२. कोणत्याही दोन संख्यांचें गायन मध्यप्रमाण, त्या दों होंचे गुणाकाराचे दुपटीस त्यांचेच बेरजेनें भागून जो भागाकार येतो, त्याबराबर असते .

$$\therefore (१ \text{ सि.प्र.०}) \frac{अ}{क} = \frac{अ-ब}{ब-क}, \text{ अब-अक=अक-बक,}$$

$$\text{अब+बक=२अक, } \therefore \text{ब(गायनमध्यप्रमाण)} = \frac{२अक}{अ+क} .$$

३. जर तीन पदे गायनप्रमाणांत असतील तर तिसरें पद, पहिलें आणि दुसरें ह्यांचे गुणाकारास पहिल्यांचे दुपटीतून दुसरें वजा करून जी बाकी राहिल तिनें भागून जो भागाकार येतो, त्याबराबर असते .

$$\therefore (१ \text{ सि.प्र.०}) \text{अब-अक=अक-बक, } \therefore \text{क} = \frac{अब}{२अ-ब} .$$

४. गायनश्रेढींत कोणत्याही दोन जवळ जवळ पदांचा गुणाकार दुसऱ्या कोणत्याही दोन जवळ जवळ पदांचे गुणाकारास आहे, नशी पहिल्या दोन पदांची वजाबाकी दुसऱ्या दोन पदांचे वजाबाकीस आहे .

$\therefore$  अ, ब, क, ..... ख, ह, ही एक गायनश्रेढी घे,

तर हींतील पदांचे व्युत्क्रमगणितप्रमाणांत आहेत.

$$\therefore (२२कल०प्र०) \frac{१}{अ} - \frac{१}{ब} = \frac{१}{ख} - \frac{१}{ह}, \quad \frac{ब-अ}{अब} = \frac{ह-ख}{खह},$$

$$\frac{अब}{खह} = \frac{अ-ब}{ख-ह}, \therefore अब:खह:अ-ब:ख-ह.$$

५. गायनश्रेढींतील अ आणि ब हीं पहिलीं दोन पदे दिलीं असतां त्यांपासून नवें पद ज्ञा, खालचे सारणीनें काढतां येतें;

$$ज्ञ = \frac{अब}{(न-१)अ-(न-२)ब}.$$

$$\therefore (२२कल०प्र०) \frac{१}{ब} - \frac{१}{अ} = \frac{अ-ब}{अब} = ड = उत्तर,$$

$$\text{आणि (२२क०सि०प्र०) } \frac{१}{ज्ञ} = \frac{१}{अ} + (न-१) \left\{ ड = \frac{अ-ब}{अब} \right\}$$

$$= \frac{(न-१)अ-(न-२)ब}{अब} = \text{अंत्यपद},$$

$$\therefore ज्ञ = \frac{अब}{(न-१)अ-(न-२)ब}.$$

६. अ आणि ब ह्यांच्या मध्यें न गायनमध्यप्रमाणें घालणें झाल्यास  $\frac{१}{अ}$  आणि  $\frac{१}{ब}$  ह्यांच्या मध्यें न गणितमध्यप्रमाणें घालून त्याचे व्युत्क्रम घ्यावे, म्हणजे ते गायनमध्यप्रमाणें दारखबितील.

## उदाहरणे.

१. २ आणि  $\frac{१}{६}$  ह्यांच्या मध्ये दोन गायनमध्यप्रमाणे घाल.

$\frac{३}{१}$ ,  $\frac{१}{६}$  हीं नार पदांच्या गायनश्रेढीचीं आद्यंत परें आहेत,  
 $\therefore \frac{१}{२}, ५ \dots\dots\dots$  गणितश्रेढीचीं  $\dots\dots\dots$

$$(२२ कल०४ उदा० प्र०) ड = \frac{ल-अ}{न-१} = \frac{५-\frac{१}{२}}{४-१} = \frac{४\frac{१}{२}}{३} = \frac{९}{६} = \frac{३}{२}$$

$$\therefore \left. \begin{array}{l} \frac{१}{२} + \frac{३}{२} = २ \\ २ + \frac{३}{२} = \frac{७}{२} \end{array} \right\} \text{ हीं गणितमध्यप्रमाणे आहेत. }$$

$\therefore \frac{१}{२}, \frac{३}{२}$  हीं गायनमध्यप्रमाणे आहेत.

२. एका गायनश्रेढीच्या तीन पदांची बेरीज  $१\frac{१}{२}$  आहे, आणि तींतील पहिलें पद  $\frac{१}{२}$  आहे; तर ती श्रेढी काढ, आणि ती दोन्ही बाजूंनीं वाढीय.

दुसरें पद = क्ष, आणि तिसरें पद = य ये,

$$\text{तर } \frac{१}{२} + क्ष + य = १\frac{१}{२}, \therefore क्ष + य = १\frac{१}{२} - \frac{१}{२} = \frac{७}{२},$$

परंतु गायनप्रमाणाप्रमाणे,  $ब = \frac{२अक}{अ+क}$ ,

$$\therefore क्ष = \frac{२ \times \frac{१}{२} \times य}{\frac{१}{२} + य} = \frac{य}{य + \frac{१}{२}} = \frac{२य}{२य + १}, \text{ परंतु (१) } क्ष = \frac{७}{२} - य,$$

$$\therefore \frac{७}{२} - य = \frac{२य}{२य + १}, \therefore य = \frac{१}{४}, \therefore क्ष = \frac{१}{४}.$$



- $\therefore \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots, \infty = \text{गायनश्रेढी}; \therefore 2, 3, 4, \dots, \infty = \text{गणितश्रेढी}$   
 $\therefore -1, 0, 1, 2, 3, 4, \dots, \infty = \text{दोन्हीकडून वाढविलेली गणितश्रेढी}$   
 $\therefore \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \frac{1}{7}, \dots, \infty = \text{दोन्हीकडून वाढविलेली गायनश्रेढी}$   
 $\therefore -1, \infty, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots, \infty = \text{उत्तर}.$

३. गायनप्रमाणांत अशा तीन संख्या काढ, कीं ज्यांची बेरीज ११ आहे, व ज्यांच्या वर्गांची बेरीज ४९ आहे.

आद्यंत पदे दारववायास क्ष आणि य घे,

तर  $\frac{२क्षय}{क्ष+य} = \text{मध्यप्रमाण}.$

$$क्ष+य + \frac{२क्षय}{क्ष+य} = ११, \dots\dots (१)$$

$$क्ष^२+य^२ + \frac{४क्षय^२}{(क्ष+य)^२} = ४९, \dots\dots (२)$$

$$(१) \frac{२क्षय}{क्ष+य} = ११ - (क्ष+य),$$

$$\therefore \frac{४क्षय^२}{(क्ष+य)^२} = १२१ - २२(क्ष+य) + क्ष^२ + २क्षय + य^२$$

$$(२) \frac{४क्षय^२}{(क्ष+य)^२} = ४९ \quad \left. \begin{array}{l} - क्ष^२ \quad - य^२ \end{array} \right\} \text{कटविले जाईल}$$

$$= ७२ - २२(क्ष+य) + २क्ष^२ + २क्षय + २य^२$$

$$\therefore \text{क्ष}^3 + \text{क्षय} + \text{य}^3 = 99(\text{क्ष} + \text{य}) - 36 \quad \left. \vphantom{\begin{matrix} \text{क्ष}^3 + \text{क्षय} + \text{य}^3 \\ \text{क्ष}^3 + 4\text{क्षय} + \text{य}^3 \end{matrix}} \right\} \text{वजाबाकी घे.}$$

$$(1) \quad \text{क्ष}^3 + 4\text{क्षय} + \text{य}^3 = 99(\text{क्ष} + \text{य})$$


---


$$3\text{क्षय} = 36, \therefore \text{क्षय} = 12,$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{क्ष}^3 + \text{क्षय} + \text{य}^3 - 99(\text{क्ष} + \text{य}) = -36 \\ \text{क्षय} = 12 \end{array} \right\} \text{बेरीज घे.}$$


---

$$\text{क्ष}^3 + 2\text{क्षय} + \text{य}^3 - 99(\text{क्ष} + \text{य}) = -24, \therefore \text{क्ष} + \text{य} = 0,$$

$$\therefore \text{क्ष} = 6, \therefore \text{य} = 2, \therefore 2, 3, 6. \text{ उत्तर.}$$

४. जर  $\frac{अ-ब}{ब-क} = \frac{अ}{ब}$ , किंवा  $\frac{अ}{ब}$ ; तर असें सिद्ध कर कीं अ, ब, क, हीं पदे अनुक्रमें गणितप्रमाणांत, भूमितिप्रमाणांत, किंवा गायनप्रमाणांत आहेत.

$$\therefore \text{जर } \frac{अ-ब}{ब-क} = \frac{अ}{ब} = 1, \text{ तर } अ-ब = ब-क,$$

$\therefore$  अ, ब, क, गणितप्रमाणांत आहेत.

$$\text{आणि जर } \frac{अ-ब}{ब-क} = \frac{अ}{ब}, \text{ तर } अब-ब^2 = अब-अक,$$

$\therefore ब^2 = अक, \therefore$  अ, ब, क, भूमितिप्रमाणांत आहेत.

$$\dots\dots\dots \frac{अ-ब}{ब-क} = \frac{अ}{क}, \text{ तर } अ:क :: अ-ब:ब-क,$$

$\therefore$  अ, ब, क, गायनप्रमाणांत आहेत.

५. अ आणि ब ह्यांचें गणितमध्यप्रमाण, भूमि-  
तिमध्यप्रमाण, आणि गायनमध्यप्रमाण, हीं अनुक्रमे  
न, म, प, आहेत; तर असें सिद्ध कर कीं  $m = n$  आणि  
प ह्यांचे भूमितिमध्यप्रमाण; आणि  $n > m > p$ .

$$\begin{aligned}\therefore \text{अ, ब, ह्यांचें गणितमध्यप्रमाण} &= n = \frac{a+b}{2}, \\ \dots\dots\dots \text{भूमिति} \dots\dots\dots &= m = \sqrt{ab}, \\ \dots\dots\dots \text{गायन} \dots\dots\dots &= p = \frac{2ab}{a+b},\end{aligned}$$

$$\therefore np = \frac{a+b}{2} \times \frac{2ab}{a+b} = ab = m^2,$$

$\therefore$  (२३क०सि०२कु०प्र०)  $m = n$  आणि प ह्यांचें भूमितिमध्यप्र

$$\text{पुनः, (१८क०१उदा०प्र०)} \frac{a}{2} + \frac{b}{2} > 2 \cdot \sqrt{\frac{a}{2}} \cdot \sqrt{\frac{b}{2}},$$

$$\text{म्हणजे } \frac{a+b}{2} > \sqrt{ab}, \therefore n > m;$$

$$\text{असेंच, } p = \frac{2ab}{a+b} = \frac{ab}{\frac{a+b}{2}} = \frac{m \cdot m}{n},$$

$$\text{परंतु } n > m, \therefore m > p, \therefore n > m > p.$$

उदाहरणें.

१. २ आणि ४ ह्यांचे मध्यें दोन गायनमध्यप्रमाणें  
घाल.

उत्तर. २६, ३.

२. ४ आणि  $9\frac{1}{3}$  ह्यांचे मध्ये तीन गायनमध्यप्रमाणे घाल .  
उत्तर. ३,  $२\frac{१}{३}$ , २.

३.  $३\frac{१}{२}$  आणि  $१\frac{१}{२}$  ह्यांचे गणितमध्यप्रमाण, भूमितिमध्यप्रमाण आणि गायनमध्यप्रमाण काढ .

उत्तर.  $२\frac{७}{१६}$ ,  $२\frac{१}{४}$ ,  $२\frac{१}{१२}$ .

४.  $\frac{१}{२}$  आणि  $\frac{१}{११}$  ह्यांचे मध्ये दोन गायनमध्यप्रमाणे घाल .  
उत्तर.  $\frac{१}{६}$ ,  $\frac{१}{२}$ .

५.  $१\frac{१}{२}$ ,  $२\frac{१}{६}$ ,  $३\frac{१}{६}$  ही श्रेणी दोन्ही बाजूंनी तीन तीन पदांपर्यंत वाढीव .

उत्तर.  $\frac{१९}{१२}$ ,  $\frac{१९}{१६}$ ,  $१\frac{३}{१२}$ , ..... १५, -७  $\frac{१}{२}$ , -३.

६. अशा दोन संख्या काढ, की ज्यांची वजाबाकी ८ आहे, व ज्यांचे गायनमध्यप्रमाण  $१\frac{५}{६}$  आहे .

उत्तर. ९ आणि १, अथवा  $\frac{५}{६}$  आणि -७  $\frac{१}{६}$ .

७. दोन संख्यांचे गायनमध्यप्रमाण २ आहे, आणि त्यांची बेरीज  $४\frac{५}{१२}$  आहे, तर त्या दोन संख्या काढ .  
उत्तर.  $२\frac{३}{६}$ ,  $१\frac{१}{६}$ .

८. दोन संख्यांचे गणितमध्यप्रमाणाची आणि गायनमध्यप्रमाणाची बेरीज  $१२\frac{१}{६}$  आहे, आणि गायनमध्यप्रमाण गणितमध्यप्रमाणांत बजा केले

असतां बाकी १६ साहते; तर त्या दोन संख्या काढ.

उत्तर. ४ आणि १०.

९. क्ष आणि य ह्यांचें भूमितिमध्यप्रमाणः त्यांचें गायनमध्यप्रमाणः : मः न, तर असें सिद्ध कर कीं क्षः यः : म+१(मै-नै) : म-१(मै-नै).

१०. १+१+२+३+५+८+ इत्यादि, ह्या श्रेढींत प्रत्येक पद त्याचे पाठीमागल्या दोन पदांच्या बेरीजे बरोबर आहे; तर हींतील न पदांची बेरीज काढ.

उत्तर.  $\frac{1}{\sqrt{5}} \left\{ \left( \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{n+2} - \left( \frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{n+2} \right\} - 1$ .

## प्रकरण ९.

### द्विपदकरणी.

#### सिद्धांत.

(२९). १. कोणत्याही पदाचें वर्गमूळ खंड पद आणि अखंड पद मिळून होणार नाहीं.

जर होत असेल, तर  $\sqrt{क्ष} = अ + \sqrt{य}$  घे,  
तर  $क्ष = अ^2 + २अ\sqrt{य} + य$ ,  $\therefore क्ष - य - अ^2 = २अ\sqrt{य}$ ,

∴  $\frac{\text{क्ष-य-अ}}{\text{अ}} = \sqrt{\text{य}}$ , म्हणजे अखंडपद = खंडपद,  
 हें होणें अशक्य आहे.

२.  $\text{अ} + \sqrt{\text{क्ष}} = \text{ब} + \sqrt{\text{य}}$  हें अखंड पद आणि खंड-  
 पद, ह्यांचें एक समीकरण असेल, तर  $\text{अ} = \text{ब}$ , आणि  $\sqrt{\text{क्ष}} = \sqrt{\text{य}}$ .

कारण,  $\sqrt{\text{क्ष}} = \text{ब} - \text{अ} + \sqrt{\text{य}}$ , आणि जर  $\text{ब} - \text{अ} = ०$   
 नसेल, तर  $\sqrt{\text{क्ष}}$  अखंडपद व खंडपद मिळून होईल,  
 परंतु हें होणें १ ले सिद्धांतावरून अशक्य आहे,  
 म्हणून  $\text{ब} - \text{अ} = ०$ , म्हणजे  $\text{अ} = \text{ब}$ , ∴  $\sqrt{\text{क्ष}} = \sqrt{\text{य}}$ .

३. दोन भिन्न भिन्न करणींचा गुणाकार खंड आहे.  
 जर नसेल, तर  $\sqrt{\text{क्ष}} \times \sqrt{\text{य}} = \text{अक्ष घे}$ , तर  $\text{क्षय} = \text{अक्ष}$ ,  
 $\text{य} = \text{अक्ष}$ , ∴  $\sqrt{\text{य}} = \text{अ}\sqrt{\text{क्ष}}$ ; म्हणजे  $\sqrt{\text{य}}$  आणि  
 $\sqrt{\text{क्ष}}$  ह्यांस एकच जातीचा करणीरूप गुणक आहे, परंतु  
 हें आपले मूळकल्पनेस अंगदीं विरुद्ध आहे.

४. ज्या द्विपदांत एक अखंड पद आणि एक खंड  
 पद हीं आहेत त्याचें वर्गमूळ काढावयाचें.

$\text{अ} + \sqrt{\text{ब}}$  हें दिलेलें द्विपद आहे, असें मान.

$\sqrt{\text{अ} + \sqrt{\text{ब}}} = \sqrt{\text{क्ष}} + \sqrt{\text{य}}$ , असें घे; दोन्ही बाजूंचा वर्ग कर.

$$अ + \sqrt{ब} = क्ष + २\sqrt{क्षय} + य,$$

$$\therefore (२सि०प्र०) क्ष + य = अ, २\sqrt{क्षय} = \sqrt{ब},$$

$$क्ष + २क्षय + य = अ, ४क्षय = ब,$$

$$क्ष - २क्षय + य = अ - ब, \therefore क्ष - य = \sqrt{अ - ब},$$

$$क्ष + य = अ$$

$$२क्ष = अ + \sqrt{अ - ब},$$

$$२य = अ - \sqrt{अ - ब},$$

$$\therefore क्ष = \frac{अ + \sqrt{अ - ब}}{२}, य = \frac{अ - \sqrt{अ - ब}}{२},$$

$$\therefore \sqrt{अ + \sqrt{ब}} = \sqrt{क्ष + \sqrt{ब}} =$$

$$\pm \sqrt{\frac{अ + \sqrt{अ - ब}}{२}} \pm \sqrt{\frac{अ - \sqrt{अ - ब}}{२}}.$$

उदाहरणें.

१.  $७ \pm ४\sqrt{३}$  ह्यांचें वर्गमूळ काढ.

$$\sqrt{७ \pm ४\sqrt{३}} = \sqrt{क्ष \pm \sqrt{ब}} \text{ असें घे,}$$

$$\text{तर } ७ \pm ४\sqrt{३} = क्ष \pm २\sqrt{क्षय} + य,$$

$$\therefore क्ष + य = ७, \pm २\sqrt{क्षय} = \pm ४\sqrt{३},$$

$$x^2 + 2xy + y^2 = 49, \quad 4xy = 48$$

$$\therefore x^2 - 2xy + y^2 = 1, \therefore x - y = 1 \quad \left. \begin{array}{l} x = 4, \\ x + y = 6 \end{array} \right\} \therefore y = 2,$$

$$\therefore \sqrt{7 \pm 4\sqrt{3}} = \sqrt{x} \pm \sqrt{y} = 2 \pm \sqrt{3}.$$

$$\text{दीप. } \sqrt{a+b} = \pm \sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2-b}}{2}} \pm \sqrt{\frac{a-\sqrt{a^2-b}}{2}},$$

ह्या सारणींत  $a=7$  आणि  $b=4\sqrt{3} = \sqrt{48}$  धरल्या-  
नें हें उदाहरण सोडवितां येईल;

$$\text{म्हणजे } \sqrt{7 \pm 4\sqrt{3}} =$$

$$\pm \sqrt{\frac{7+\sqrt{49-48}}{2}} \pm \sqrt{\frac{7-\sqrt{49-48}}{2}} = \pm 2 \pm \sqrt{3}.$$

ह्या प्रमाणेंच पुढील सर्व उदाहरणें सोडवितां अ-  
सतां नोंद होतील.

२.  $49 + 20\sqrt{6}$  ह्याचें चतुर्घातमूळ काढ.

$$\sqrt{49+20\sqrt{6}} = \sqrt{x} + \sqrt{y}, \text{ असें घे:}$$

$$\text{तर } 49+20\sqrt{6} = x+y+2\sqrt{xy},$$

$$\therefore x+y=49, \quad 2\sqrt{xy}=20\sqrt{6},$$

$$\therefore x^2+2xy+y^2=2401, \quad 4xy=2400,$$



$$\therefore \text{क्ष}^2 - २\text{क्षय} + \text{य}^2 = १, \therefore \text{क्ष} - \text{य} = १, \left\{ \begin{array}{l} \text{क्ष} = २५ = ५^2, \\ \text{क्ष} + \text{य} = ४० \end{array} \right\} \therefore \text{य} = २४ = ४ \times ६$$

$$\therefore \sqrt{४९ \pm २०\sqrt{६}} = \sqrt{\text{क्ष}} \pm \sqrt{\text{य}} = ५ \pm २\sqrt{६};$$

$$\text{पुनः, } \sqrt{५ \pm २\sqrt{६}} = \sqrt{\text{क्ष}} \pm \sqrt{\text{य}} \text{ असें घे,}$$

$$\text{तर } ५ \pm २\sqrt{६} = \text{क्ष} + \text{य} \pm २\sqrt{\text{क्षय}},$$

$$\therefore \text{क्ष} + \text{य} = ५, \pm २\sqrt{\text{क्षय}} = \pm २\sqrt{६},$$

$$\text{क्ष}^2 + २\text{क्षय} + \text{य}^2 = २५, ४\text{क्षय} = २४,$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{क्ष}^2 + \text{य}^2 - २\text{क्षय} = १, \text{क्ष} - \text{य} = १, \\ \text{क्ष} + \text{य} = ५ \end{array} \right\} \therefore \text{क्ष} = ३, \text{य} = २,$$

$$\therefore \sqrt{४९ \pm २०\sqrt{६}} = \sqrt{५ \pm २\sqrt{६}} = \sqrt{\text{क्ष}} \pm \sqrt{\text{य}} = ३ \pm \sqrt{२}$$

३. -१ ह्याचें अष्टघातमूळ काढ.

$$-१ \text{ ह्याचें वर्गमूळ} = \sqrt{-१}, \text{ किंवा } ० + \sqrt{-१};$$

$$\sqrt{० + \sqrt{-१}} = \sqrt{\text{क्ष}} + \sqrt{\text{य}}, \text{ असें घे;}$$

$$\text{तर } \text{क्ष} + \text{य} + २\sqrt{\text{क्षय}} = ० + \sqrt{-१},$$

$$\text{क्ष} + \text{य} = ०, २\sqrt{\text{क्षय}} = \sqrt{-१},$$

$$\text{क्ष}^2 + २\text{क्षय} + \text{य}^2 = ०,$$

$$४\text{क्षय} = -१$$

$$\text{क्ष}^2 - २\text{क्षय} + \text{य}^2 = १,$$

$$\therefore \text{क्ष} - \text{य} = १$$

$$x+y' = 0$$

$$2x = 1, \therefore x = \frac{1}{2}, \sqrt{x} = \sqrt{\frac{1}{2}},$$

$$2y = -1, \therefore y = -\frac{1}{2}, \sqrt{y} = \sqrt{-\frac{1}{2}},$$

$$\therefore \sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{\frac{1}{2}} + \sqrt{-\frac{1}{2}},$$

$$\therefore \sqrt{\sqrt{-1}} = \sqrt{\frac{1}{2}} + \sqrt{-\frac{1}{2}} ;$$

$$\sqrt{\sqrt{\frac{1}{2}} + \sqrt{-\frac{1}{2}}} = \sqrt{x} + \sqrt{y} \text{ असें घे,}$$

$$\text{तर } x+y+2\sqrt{xy} = \sqrt{\frac{1}{2}} + \sqrt{-\frac{1}{2}},$$

$$x+y = \sqrt{\frac{1}{2}}, \quad 2\sqrt{xy} = \sqrt{-\frac{1}{2}},$$

$$x^2 + 2xy + y^2 = \frac{1}{2},$$

$$4xy = -\frac{1}{2}$$

$$\frac{x^2 - 2xy + y^2 = 1,}{}$$

$$x-y = 1$$

$$\frac{x+y = \sqrt{\frac{1}{2}}}{}$$

$$2x = 1 + \sqrt{\frac{1}{2}}, \therefore x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}},$$

$$2y = \sqrt{\frac{1}{2}} - 1, \therefore y = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}} - \frac{1}{2},$$

$$\therefore \sqrt{x} = \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}, \quad \sqrt{y} = \sqrt{\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}},$$

$$\therefore \sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}} + \sqrt{\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}},$$

$$\therefore \sqrt{5-9} = \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{3}} + \sqrt{\frac{1}{2}\sqrt{3} - \frac{1}{2}},$$

$$= \text{सुमारें, } .9239 + .3620\sqrt{-9}.$$

### उदाहरणें.

१.  $2+\sqrt{3}$ ,  $6+2\sqrt{3}$ , आणि  $4-\sqrt{3}$  यांचें वर्गमूळ काढ.

उत्तर.  $\sqrt{3} + \sqrt{3}$ ,  $1+\sqrt{3}$ , आणि  $\sqrt{3}-\sqrt{3}$

२.  $6-2\sqrt{15}$ , आणि  $-9-8\sqrt{-3}$  यांचें वर्गमूळ काढ.

उत्तर.  $\sqrt{5}-\sqrt{3}$ ,  $2-\sqrt{-3}$

३.  $1+\sqrt{1-m^2}$ , आणि  $3\sqrt{3}+2\sqrt{6}$ , यांचें वर्गमूळ काढ. उत्तर.  $\sqrt{\frac{1+m}{2}} + \sqrt{\frac{1-m}{2}}$ ,  $\sqrt{3}(1+\sqrt{2})$ .

४.  $14+6\sqrt{3}$ , आणि  $\frac{10}{3}-4\sqrt{3}$  यांचें चतुर्घातमूळ काढ.

उत्तर.  $\sqrt[4]{\frac{3+1}{2}}$ , आणि  $\sqrt[4]{\frac{3}{2}}(1-\sqrt{3})$

## प्रकरण १०.

### अनिश्चितवेळाप्रकाशक.

(२६).  $अ + बक्ष + कक्ष + \dots = थ + घक्ष + मक्ष + \dots$

हे समीकरण सन्नीकोणती ही किंमत धरली असतां खरे आहे असें मानलें, तर क्षच्या सारख्या यातां चे वेळाप्रकाशक बरोबर होतील; म्हणजे  $अ = थ$ ,  $ब = घ$ ,  $क = म$ , इत्यादि.

$\therefore अ - थ + बक्ष - घक्ष + कक्ष - मक्ष + \dots = ०$ ,  
म्हणजे,  $अ - थ + (ब - घ)क्ष + (क - म)क्ष + \dots = ०$ ;

आतां,  $अ - थ = ०$  नसेल, तर त्याच्या बरोबर एकादें अविकारी पद मघे,

तर,  $(ब - घ)क्ष + (क - म)क्ष + \dots = म$ ;

आणि  $\therefore$  अ आणि थ हीं अविकारी पदे आहेत, म्हणून  $अ - थ$  म्हणजे म हे अविकारी पद आहे. परंतु  $\therefore$  क्षपदांत जसजसा फेरफार होईल त्याप्रमाणें मपदाच्या भिन्न भिन्न किमती होतील,  $\therefore$  मपद विकारी आहे; म्हणजे म हे पद अविकारी आणि विकारी आहे, हे असणें अशक्य आहे;

$$\therefore अ = थ = ०, म्हणजे प्र = थ.$$

$$पुनः, ब - घ + (क - म) क्ष + \dots = ०,$$

$$\therefore बरल्या प्रमाणेंच ब = घ, आणि क = म, इत्यादि.$$

$$जर अ + बक्ष + कक्ष + \dots अय + बक्षय + \dots + कय + \dots = थ + घक्ष + मक्ष + \dots + थय + घक्षय + \dots + मय + \dots$$

आणि य पद विकारी असतां क्षयदास जर कांहीं एकादी अविकारी किंमत दिली, तर बरल्या प्रमाणेंच असें दाखवितां येईल, कीं

$$अ = थ, ब = घ, क = म, अ = थ, ब = घ, क = म, इत्यादि.$$

### उदाहरणें.

$$१. अशी कांहीं अपूर्णपदे काढ, कीं ज्यांची बेरीज$$

$$= \frac{२१}{(११+१)(११+३)}$$

$$\frac{२१}{(११+१)(११+३)} = \frac{अ}{११+१} + \frac{ब}{११+३} \text{ असें ये, तर}$$

$$= \frac{अ(११+३) + ब(११+१)}{(११+१)(११+३)},$$

$$\therefore २१ = (अ + ब)११ + (३अ + ब),$$

$$\therefore १ = ३अ + ब, आणि (अ + ब)११ = ०, \therefore अ = -ब,$$

$$\therefore २ = -३ब + ७ = -२ब, \therefore ब = -१, \therefore अ = १;$$

$$\therefore \frac{२२५}{(२५+१)(२५+३)} = \frac{२५}{२५+१} - \frac{२५}{२५+३}.$$

२. य<sup>३</sup> - ३य + २५ = ०, तर यची किंमत २५ च्या बदल्या घातांत काढ.

$$\begin{aligned} \text{य} &= अ२५ + ब२५ + क२५ + उ२५ + इ०, \text{असें घे;} \\ \text{तर य} &= \left. \begin{aligned} &अ२५ + ३अब२५ + ३अक२५ + इ० \\ &+ ३अब२५ + इ० \\ -३य &= -३अ२५ - ३ब२५ - ३क२५ - ३उ२५ - इ० \\ +२५ &= +२५ \end{aligned} \right\} = ०, \end{aligned}$$

आणि २५ च्या सारख्या घातांच्या वेळाप्रकाशकांचें समीकरण केल्यानें,

$$-३अ = -१, \therefore अ = \frac{१}{३}; अ = ३ब, \therefore ब = \frac{अ}{३} = \frac{१}{९};$$

$$३अब = ३क, \therefore क = अब = \frac{१}{३६}, \text{इत्यादि;}$$

$$\therefore य = \frac{२५}{३} + \frac{२५}{९} + \frac{२५}{३६} + \frac{२५}{३६} + \frac{२५}{३६} + इ०.$$

य = अ२५ + ब२५ + क२५ + उ२५ + इ०, असें जर आपण घेतलें असतें, तर २५ च्या समघातांचे वेळाप्रकाशक शून्य आलें असतें.

## उदाहरणें

१. अशीं कांहीं अपूर्ण पदें काढ, कीं त्यांची बेरीज

$$= \frac{x^2}{(x^2-1)(x-2)}.$$

उत्तर.  $\frac{4}{3(x-2)} - \frac{1}{2(x-1)} + \frac{1}{6(x+1)}.$

२. असें सिद्ध कर कीं  $\frac{1+2x}{1-x-x^2} =$

$1+3x+4x^2+5x^3+6x^4+7x^5+8x^6+9x^7+10x^8+11x^9+12x^{10}+13x^{11}+14x^{12}+15x^{13}+16x^{14}+17x^{15}+18x^{16}+19x^{17}+20x^{18}+21x^{19}+22x^{20}+23x^{21}+24x^{22}+25x^{23}+26x^{24}+27x^{25}+28x^{26}+29x^{27}+30x^{28}+31x^{29}+32x^{30}+33x^{31}+34x^{32}+35x^{33}+36x^{34}+37x^{35}+38x^{36}+39x^{37}+40x^{38}+41x^{39}+42x^{40}+43x^{41}+44x^{42}+45x^{43}+46x^{44}+47x^{45}+48x^{46}+49x^{47}+50x^{48}+51x^{49}+52x^{50}+53x^{51}+54x^{52}+55x^{53}+56x^{54}+57x^{55}+58x^{56}+59x^{57}+60x^{58}+61x^{59}+62x^{60}+63x^{61}+64x^{62}+65x^{63}+66x^{64}+67x^{65}+68x^{66}+69x^{67}+70x^{68}+71x^{69}+72x^{70}+73x^{71}+74x^{72}+75x^{73}+76x^{74}+77x^{75}+78x^{76}+79x^{77}+80x^{78}+81x^{79}+82x^{80}+83x^{81}+84x^{82}+85x^{83}+86x^{84}+87x^{85}+88x^{86}+89x^{87}+90x^{88}+91x^{89}+92x^{90}+93x^{91}+94x^{92}+95x^{93}+96x^{94}+97x^{95}+98x^{96}+99x^{97}+100x^{98}+101x^{99}+102x^{100}+103x^{101}+104x^{102}+105x^{103}+106x^{104}+107x^{105}+108x^{106}+109x^{107}+110x^{108}+111x^{109}+112x^{110}+113x^{111}+114x^{112}+115x^{113}+116x^{114}+117x^{115}+118x^{116}+119x^{117}+120x^{118}+121x^{119}+122x^{120}+123x^{121}+124x^{122}+125x^{123}+126x^{124}+127x^{125}+128x^{126}+129x^{127}+130x^{128}+131x^{129}+132x^{130}+133x^{131}+134x^{132}+135x^{133}+136x^{134}+137x^{135}+138x^{136}+139x^{137}+140x^{138}+141x^{139}+142x^{140}+143x^{141}+144x^{142}+145x^{143}+146x^{144}+147x^{145}+148x^{146}+149x^{147}+150x^{148}+151x^{149}+152x^{150}+153x^{151}+154x^{152}+155x^{153}+156x^{154}+157x^{155}+158x^{156}+159x^{157}+160x^{158}+161x^{159}+162x^{160}+163x^{161}+164x^{162}+165x^{163}+166x^{164}+167x^{165}+168x^{166}+169x^{167}+170x^{168}+171x^{169}+172x^{170}+173x^{171}+174x^{172}+175x^{173}+176x^{174}+177x^{175}+178x^{176}+179x^{177}+180x^{178}+181x^{179}+182x^{180}+183x^{181}+184x^{182}+185x^{183}+186x^{184}+187x^{185}+188x^{186}+189x^{187}+190x^{188}+191x^{189}+192x^{190}+193x^{191}+194x^{192}+195x^{193}+196x^{194}+197x^{195}+198x^{196}+199x^{197}+200x^{198}+201x^{199}+202x^{200}+203x^{201}+204x^{202}+205x^{203}+206x^{204}+207x^{205}+208x^{206}+209x^{207}+210x^{208}+211x^{209}+212x^{210}+213x^{211}+214x^{212}+215x^{213}+216x^{214}+217x^{215}+218x^{216}+219x^{217}+220x^{218}+221x^{219}+222x^{220}+223x^{221}+224x^{222}+225x^{223}+226x^{224}+227x^{225}+228x^{226}+229x^{227}+230x^{228}+231x^{229}+232x^{230}+233x^{231}+234x^{232}+235x^{233}+236x^{234}+237x^{235}+238x^{236}+239x^{237}+240x^{238}+241x^{239}+242x^{240}+243x^{241}+244x^{242}+245x^{243}+246x^{244}+247x^{245}+248x^{246}+249x^{247}+250x^{248}+251x^{249}+252x^{250}+253x^{251}+254x^{252}+255x^{253}+256x^{254}+257x^{255}+258x^{256}+259x^{257}+260x^{258}+261x^{259}+262x^{260}+263x^{261}+264x^{262}+265x^{263}+266x^{264}+267x^{265}+268x^{266}+269x^{267}+270x^{268}+271x^{269}+272x^{270}+273x^{271}+274x^{272}+275x^{273}+276x^{274}+277x^{275}+278x^{276}+279x^{277}+280x^{278}+281x^{279}+282x^{280}+283x^{281}+284x^{282}+285x^{283}+286x^{284}+287x^{285}+288x^{286}+289x^{287}+290x^{288}+291x^{289}+292x^{290}+293x^{291}+294x^{292}+295x^{293}+296x^{294}+297x^{295}+298x^{296}+299x^{297}+300x^{298}+301x^{299}+302x^{300}+303x^{301}+304x^{302}+305x^{303}+306x^{304}+307x^{305}+308x^{306}+309x^{307}+310x^{308}+311x^{309}+312x^{310}+313x^{311}+314x^{312}+315x^{313}+316x^{314}+317x^{315}+318x^{316}+319x^{317}+320x^{318}+321x^{319}+322x^{320}+323x^{321}+324x^{322}+325x^{323}+326x^{324}+327x^{325}+328x^{326}+329x^{327}+330x^{328}+331x^{329}+332x^{330}+333x^{331}+334x^{332}+335x^{333}+336x^{334}+337x^{335}+338x^{336}+339x^{337}+340x^{338}+341x^{339}+342x^{340}+343x^{341}+344x^{342}+345x^{343}+346x^{344}+347x^{345}+348x^{346}+349x^{347}+350x^{348}+351x^{349}+352x^{350}+353x^{351}+354x^{352}+355x^{353}+356x^{354}+357x^{355}+358x^{356}+359x^{357}+360x^{358}+361x^{359}+362x^{360}+363x^{361}+364x^{362}+365x^{363}+366x^{364}+367x^{365}+368x^{366}+369x^{367}+370x^{368}+371x^{369}+372x^{370}+373x^{371}+374x^{372}+375x^{373}+376x^{374}+377x^{375}+378x^{376}+379x^{377}+380x^{378}+381x^{379}+382x^{380}+383x^{381}+384x^{382}+385x^{383}+386x^{384}+387x^{385}+388x^{386}+389x^{387}+390x^{388}+391x^{389}+392x^{390}+393x^{391}+394x^{392}+395x^{393}+396x^{394}+397x^{395}+398x^{396}+399x^{397}+400x^{398}+401x^{399}+402x^{400}+403x^{401}+404x^{402}+405x^{403}+406x^{404}+407x^{405}+408x^{406}+409x^{407}+410x^{408}+411x^{409}+412x^{410}+413x^{411}+414x^{412}+415x^{413}+416x^{414}+417x^{415}+418x^{416}+419x^{417}+420x^{418}+421x^{419}+422x^{420}+423x^{421}+424x^{422}+425x^{423}+426x^{424}+427x^{425}+428x^{426}+429x^{427}+430x^{428}+431x^{429}+432x^{430}+433x^{431}+434x^{432}+435x^{433}+436x^{434}+437x^{435}+438x^{436}+439x^{437}+440x^{438}+441x^{439}+442x^{440}+443x^{441}+444x^{442}+445x^{443}+446x^{444}+447x^{445}+448x^{446}+449x^{447}+450x^{448}+451x^{449}+452x^{450}+453x^{451}+454x^{452}+455x^{453}+456x^{454}+457x^{455}+458x^{456}+459x^{457}+460x^{458}+461x^{459}+462x^{460}+463x^{461}+464x^{462}+465x^{463}+466x^{464}+467x^{465}+468x^{466}+469x^{467}+470x^{468}+471x^{469}+472x^{470}+473x^{471}+474x^{472}+475x^{473}+476x^{474}+477x^{475}+478x^{476}+479x^{477}+480x^{478}+481x^{479}+482x^{480}+483x^{481}+484x^{482}+485x^{483}+486x^{484}+487x^{485}+488x^{486}+489x^{487}+490x^{488}+491x^{489}+492x^{490}+493x^{491}+494x^{492}+495x^{493}+496x^{494}+497x^{495}+498x^{496}+499x^{497}+500x^{498}+501x^{499}+502x^{500}+503x^{501}+504x^{502}+505x^{503}+506x^{504}+507x^{505}+508x^{506}+509x^{507}+510x^{508}+511x^{509}+512x^{510}+513x^{511}+514x^{512}+515x^{513}+516x^{514}+517x^{515}+518x^{516}+519x^{517}+520x^{518}+521x^{519}+522x^{520}+523x^{521}+524x^{522}+525x^{523}+526x^{524}+527x^{525}+528x^{526}+529x^{527}+530x^{528}+531x^{529}+532x^{530}+533x^{531}+534x^{532}+535x^{533}+536x^{534}+537x^{535}+538x^{536}+539x^{537}+540x^{538}+541x^{539}+542x^{540}+543x^{541}+544x^{542}+545x^{543}+546x^{544}+547x^{545}+548x^{546}+549x^{547}+550x^{548}+551x^{549}+552x^{550}+553x^{551}+554x^{552}+555x^{553}+556x^{554}+557x^{555}+558x^{556}+559x^{557}+560x^{558}+561x^{559}+562x^{560}+563x^{561}+564x^{562}+565x^{563}+566x^{564}+567x^{565}+568x^{566}+569x^{567}+570x^{568}+571x^{569}+572x^{570}+573x^{571}+574x^{572}+575x^{573}+576x^{574}+577x^{575}+578x^{576}+579x^{577}+580x^{578}+581x^{579}+582x^{580}+583x^{581}+584x^{582}+585x^{583}+586x^{584}+587x^{585}+588x^{586}+589x^{587}+590x^{588}+591x^{589}+592x^{590}+593x^{591}+594x^{592}+595x^{593}+596x^{594}+597x^{595}+598x^{596}+599x^{597}+600x^{598}+601x^{599}+602x^{600}+603x^{601}+604x^{602}+605x^{603}+606x^{604}+607x^{605}+608x^{606}+609x^{607}+610x^{608}+611x^{609}+612x^{610}+613x^{611}+614x^{612}+615x^{613}+616x^{614}+617x^{615}+618x^{616}+619x^{617}+620x^{618}+621x^{619}+622x^{620}+623x^{621}+624x^{622}+625x^{623}+626x^{624}+627x^{625}+628x^{626}+629x^{627}+630x^{628}+631x^{629}+632x^{630}+633x^{631}+634x^{632}+635x^{633}+636x^{634}+637x^{635}+638x^{636}+639x^{637}+640x^{638}+641x^{639}+642x^{640}+643x^{641}+644x^{642}+645x^{643}+646x^{644}+647x^{645}+648x^{646}+649x^{647}+650x^{648}+651x^{649}+652x^{650}+653x^{651}+654x^{652}+655x^{653}+656x^{654}+657x^{655}+658x^{656}+659x^{657}+660x^{658}+661x^{659}+662x^{660}+663x^{661}+664x^{662}+665x^{663}+666x^{664}+667x^{665}+668x^{666}+669x^{667}+670x^{668}+671x^{669}+672x^{670}+673x^{671}+674x^{672}+675x^{673}+676x^{674}+677x^{675}+678x^{676}+679x^{677}+680x^{678}+681x^{679}+682x^{680}+683x^{681}+684x^{682}+685x^{683}+686x^{684}+687x^{685}+688x^{686}+689x^{687}+690x^{688}+691x^{689}+692x^{690}+693x^{691}+694x^{692}+695x^{693}+696x^{694}+697x^{695}+698x^{696}+699x^{697}+700x^{698}+701x^{699}+702x^{700}+703x^{701}+704x^{702}+705x^{703}+706x^{704}+707x^{705}+708x^{706}+709x^{707}+710x^{708}+711x^{709}+712x^{710}+713x^{711}+714x^{712}+715x^{713}+716x^{714}+717x^{715}+718x^{716}+719x^{717}+720x^{718}+721x^{719}+722x^{720}+723x^{721}+724x^{722}+725x^{723}+726x^{724}+727x^{725}+728x^{726}+729x^{727}+730x^{728}+731x^{729}+732x^{730}+733x^{731}+734x^{732}+735x^{733}+736x^{734}+737x^{735}+738x^{736}+739x^{737}+740x^{738}+741x^{739}+742x^{740}+743x^{741}+744x^{742}+745x^{743}+746x^{744}+747x^{745}+748x^{746}+749x^{747}+750x^{748}+751x^{749}+752x^{750}+753x^{751}+754x^{752}+755x^{753}+756x^{754}+757x^{755}+758x^{756}+759x^{757}+760x^{758}+761x^{759}+762x^{760}+763x^{761}+764x^{762}+765x^{763}+766x^{764}+767x^{765}+768x^{766}+769x^{767}+770x^{768}+771x^{769}+772x^{770}+773x^{771}+774x^{772}+775x^{773}+776x^{774}+777x^{775}+778x^{776}+779x^{777}+780x^{778}+781x^{779}+782x^{780}+783x^{781}+784x^{782}+785x^{783}+786x^{784}+787x^{785}+788x^{786}+789x^{787}+790x^{788}+791x^{789}+792x^{790}+793x^{791}+794x^{792}+795x^{793}+796x^{794}+797x^{795}+798x^{796}+799x^{797}+800x^{798}+801x^{799}+802x^{800}+803x^{801}+804x^{802}+805x^{803}+806x^{804}+807x^{805}+808x^{806}+809x^{807}+810x^{808}+811x^{809}+812x^{810}+813x^{811}+814x^{812}+815x^{813}+816x^{814}+817x^{815}+818x^{816}+819x^{817}+820x^{818}+821x^{819}+822x^{820}+823x^{821}+824x^{822}+825x^{823}+826x^{824}+827x^{825}+828x^{826}+829x^{827}+830x^{828}+831x^{829}+832x^{830}+833x^{831}+834x^{832}+835x^{833}+836x^{834}+837x^{835}+838x^{836}+839x^{837}+840x^{838}+841x^{839}+842x^{840}+843x^{841}+844x^{842}+845x^{843}+846x^{844}+847x^{845}+848x^{846}+849x^{847}+850x^{848}+851x^{849}+852x^{850}+853x^{851}+854x^{852}+855x^{853}+856x^{854}+857x^{855}+858x^{856}+859x^{857}+860x^{858}+861x^{859}+862x^{860}+863x^{861}+864x^{862}+865x^{863}+866x^{864}+867x^{865}+868x^{866}+869x^{867}+870x^{868}+871x^{869}+872x^{870}+873x^{871}+874x^{872}+875x^{873}+876x^{874}+877x^{875}+878x^{876}+879x^{877}+880x^{878}+881x^{879}+882x^{880}+883x^{881}+884x^{882}+885x^{883}+886x^{884}+887x^{885}+888x^{886}+889x^{887}+890x^{888}+891x^{889}+892x^{890}+893x^{891}+894x^{892}+895x^{893}+896x^{894}+897x^{895}+898x^{896}+899x^{897}+900x^{898}+901x^{899}+902x^{900}+903x^{901}+904x^{902}+905x^{903}+906x^{904}+907x^{905}+908x^{906}+909x^{907}+910x^{908}+911x^{909}+912x^{910}+913x^{911}+914x^{912}+915x^{913}+916x^{914}+917x^{915}+918x^{916}+919x^{917}+920x^{918}+921x^{919}+922x^{920}+923x^{921}+924x^{922}+925x^{923}+926x^{924}+927x^{925}+928x^{926}+929x^{927}+930x^{928}+931x^{929}+932x^{930}+933x^{931}+934x^{932}+935x^{933}+936x^{934}+937x^{935}+938x^{936}+939x^{937}+940x^{938}+941x^{939}+942x^{940}+943x^{941}+944x^{942}+945x^{943}+946x^{944}+947x^{945}+948x^{946}+949x^{947}+950x^{948}+951x^{949}+952x^{950}+953x^{951}+954x^{952}+955x^{953}+956x^{954}+957x^{955}+958x^{956}+959x^{957}+960x^{958}+961x^{959}+962x^{960}+963x^{961}+964x^{962}+965x^{963}+966x^{964}+967x^{965}+968x^{966}+969x^{967}+970x^{968}+971x^{969}+972x^{970}+973x^{971}+974x^{972}+975x^{973}+976x^{974}+977x^{975}+978x^{976}+979x^{977}+980x^{978}+981x^{979}+982x^{980}+983x^{981}+984x^{982}+985x^{983}+986x^{984}+987x^{985}+988x^{986}+989x^{987}+990x^{988}+991x^{989}+992x^{990}+993x^{991}+994x^{992}+995x^{993}+996x^{994}+997x^{995}+998x^{996}+999x^{997}+1000x^{998}+1001x^{999}+1002x^{1000}+1003x^{1001}+1004x^{1002}+1005x^{1003}+1006x^{1004}+1007x^{1005}+1008x^{1006}+1009x^{1007}+1010x^{1008}+1011x^{1009}+1012x^{1010}+1013x^{1011}+1014x^{1012}+1015x^{1013}+1016x^{1014}+1017x^{1015}+1018x^{1016}+1019x^{1017}+1020x^{1018}+1021x^{1019}+1022x^{1020}+1023x^{1021}+1024x^{1022}+1025x^{1023}+1026x^{1024}+1027x^{1025}+1028x^{1026}+1029x^{1027}+1030x^{1028}+1031x^{1029}+1032x^{1030}+1033x^{1031}+1034x^{1032}+1035x^{1033}+1036x^{1034}+1037x^{1035}+1038x^{1036}+1039x^{1037}+1040x^{1038}+1041x^{1039}+1042x^{1040}+1043x^{1041}+1044x^{1042}+1045x^{1043}+1046x^{1044}+1047x^{1045}+1048x^{1046}+1049x^{1047}+1050x^{1048}+1051x^{1049}+1052x^{1050}+1053x^{1051}+1054x^{1052}+1055x^{1053}+1056x^{1054}+1057x^{1055}+1058x^{1056}+1059x^{1057}+1060x^{1058}+1061x^{1059}+1062x^{1060}+1063x^{1061}+1064x^{1062}+1065x^{1063}+1066x^{1064}+1067x^{1065}+1068x^{1066}+1069x^{1067}+1070x^{1068}+1071x^{1069}+1072x^{1070}+1073x^{1071}+1074x^{1072}+1075x^{1073}+1076x^{1074}+1077x^{1075}+1078x^{1076}+1079x^{1077}+1080x^{1078}+1081x^{1079}+1082x^{1080}+1083x^{1081}+1084x^{1082}+1085x^{1083}+1086x^{1084}+1087x^{1085}+1088x^{1086}+1089x^{1087}+1090x^{1088}+1091x^{1089}+1092x^{1090}+1093x^{1091}+1094x^{1092}+1095x^{1093}+1096x^{1094}+1097x^{1095}+1098x^{1096}+1099x^{1097}+1100x^{1098}+1101x^{1099}+1102x^{1100}+1103x^{1101}+1104x^{1102}+1105x^{1103}+1106x^{1104}+1107x^{1105}+1108x^{1106}+1109x^{1107}+1110x^{1108}+1111x^{1109}+1112x^{1110}+1113x^{1111}+1114x^{1112}+1115x^{1113}+1116x^{1114}+1117x^{1115}+1118x^{1116}+1119x^{1117}+1120x^{1118}+1121x^{1119}+1122x^{1120}+1123x^{1121}+1124x^{1122}+1125x^{1123}+1126x^{1124}+1127x^{1125}+1128x^{1126}+1129x^{1127}+1130x^{1128}+1131x^{1129}+1132x^{1130}+1133x^{1131}+1134x^{1132}+1135x^{1133}+1136x^{1134}+1137x^{1135}+1138x^{1136}+1139x^{1137}+1140x^{1138}+1141x^{1139}+1142x^{1140}+1143x^{1141}+1144x^{1142}+1145x^{1143}+1146x^{1144}+1147x^{1145}+1148x^{1146}+1149x^{1147}+1150x^{1148}+1151x^{1149}+1152x^{1150}+1153x^{1151}+1154x^{1152}+1155x^{1153}+1156x^{1154}+1157x^{1155}+1158x^{1156}+1159x^{1157}+1160x^{1158}+1161x^{1159}+1162x^{1160}+1163x^{1161}+1164x^{1162}+1165x^{1163}+1166x^{1164}+1167x^{1165}+1168x^{1166}+1169x^{1167}+1170x^{1168}+1171x^{1169}+1172x^{1170}+1173x^{1171}+1174x^{1172}+1175x^{1173}+1176x^{1174}+1177x^{1175}+1178x^{1176}+1179x^{1177}+1180x^{1178}+1181x^{1179}+1182x^{1180}+1183x^{1181}+1184x^{1182}+1185x^{1183}+1186x^{1184}+1187x^{1185}+1188x^{1186}+1189x^{1187$

जी रीति प्रचारांत आहे तींत अची किंमत = १०, आणि १, १, २, ३, ४; ... क्ष, हीं १, १०, १००, १०००, १००००, .... १०<sup>क्ष</sup>, ह्या संख्यांचीं लागरथमें आहेत; म्हणजे ज्यांचीं लागरथमें घ्यावयाचीं त्या संख्या भूमितिश्रेढींत आहेत, आणि त्यांचीं लागरथमें गणितश्रेढींत आहेत.

अ<sup>क्ष</sup> = न ह्या समीकरणानून क्षची किंमत काढून तिचे योगानें लागरथमिक कोष्टकें तयार केलीं आहेत. ह्या समीकरणापासून क्षची किंमत कशी काढावी, हें पुढें २९ व्या कलमांत सांगितलें आहे.

### सिद्धांत.

१. दोन संख्यांच्या लागरथमांची बेरीज त्या दोन संख्यांच्या गुणाकाराचें लागरथम आहे.

∴ ( पाया अथरून ) क्ष = लाग०, य = लाग० न घे, तर अ<sup>क्ष</sup> = न, अ<sup>य</sup> = न, ∴ अ<sup>क्ष</sup> अ<sup>य</sup> = न न, म्हणजे अ<sup>क्ष+य</sup> = न न.

दोहोहून अधिकही संख्या असल्या तरी ह्या प्रमाणेंच जाणावें.

२. दोन संख्यांच्या लागरथमांची वजाबाकी त्या दोन संख्यांच्या भागाकाराचें लागरथम आहे



$$\therefore \text{अक्ष} = \text{न}, \text{अब} = \text{न}, \therefore \frac{\text{अक्ष}}{\text{अब}} = \frac{\text{न}}{\text{न}}, \text{हणजे } \frac{\text{अक्ष}}{\text{अब}} = \frac{\text{न}}{\text{न}}.$$

३. न ह्याचें लागरथम = म × लाग० न.

$$\text{कारण, } \therefore \text{न} = \text{अक्ष}, \therefore \text{न} = \text{अब}, \therefore \text{लाग० न} = \text{मक्ष} = \text{ब} \times \text{ला०}$$

$$४. \text{म/न ह्याचें लागरथम} = \frac{\text{लाग० न}}{\text{म}}$$

$$\text{कारण, } \therefore \text{न} = \text{अक्ष}, \therefore \text{न} = \frac{१}{\text{म}} \frac{\text{अक्ष}}{\text{म}}, \therefore \text{लाग० न} = \frac{\text{अक्ष}}{\text{म}} = \frac{\text{लाग० न}}{\text{म}}.$$

ह्यावरून संख्यांचा गुणाकार आणि भागाकार, त्यासंख्यांच्या लागरथमांच्या बेरजेनें आणि वजाबाकीनें करता येतो, आणि त्यांचे वर्ग घनादि घात किंवा मूळे, त्यांचे लागरथमास इष्ट घातप्रकाशाक किंवा इष्ट मूलप्रकाशाक आंकड्यानें गुणून किंवा भागून करता येतात.

### उदाहरणे.

$$१. \text{जर } \text{क्ष} = \text{अब}, \text{तर लाग० क्ष} = \text{लाग० अब} + \text{लाग० ब}.$$

$$२. \text{जर य} = \text{६अक}, \text{तर लाग० य} = \text{लाग० ६} + \text{लाग० अ} + \text{लाग० क}.$$

$$३. \text{जर } \text{क्ष} = \frac{\text{म}}{\text{न}}, \text{तर लाग० क्ष} = \text{लाग० म} - \text{लाग० न}.$$

$$४. \text{जर य} = \text{अ}^३, \text{तर लाग० य} = ३ \text{ लाग० अ}$$

५. जर  $\frac{र}{र-१} = \frac{५}{६}$ , तर लाग०ज्ञ =  $\frac{१}{६}$  लाग०र.

६. जर  $स = अ \cdot \frac{र-१}{र}$ , तर लागरथमांत नवी किंमत काढ.

$$स(र-१) = अर - अ, अर = स(र-१) + अ, र = \frac{स(र-१) + अ}{अ},$$

$$\therefore न \cdot लाग०र = लाग० \{ स(र-१) + अ \} - लाग०अ,$$

$$\therefore न = \frac{लाग० \{ स(र-१) + अ \} - लाग०अ}{लाग०र}.$$

७. जर  $\frac{क्ष}{५} = ४००$ , तर क्षची किंमत काढ.

$$क्षलाग०५ = लाग० ४००,$$

$$\therefore क्ष = \frac{लाग०४००}{लाग०५} = \frac{२.६०२०६०}{.६९८९७०} = \text{सुमारे } ३.७२.$$

ब्रिगसाहेबांनं जें लागरथमांचें कोष्टक केलें आहे त्यांतून वरच्या उदाहरणांत ४०० आणि ५ ह्यांची लागरथमें घेतलीं आहेत.

लागरथमाचे संख्यांत दशांशबिन्हा मागे जो आंकडा असतो त्यास पूर्णांक (व्यावर्तक) म्हणतात, आणि तो, ज्या संख्येचें लागरथम काढावयाचें असतें त्या संख्येंत जितके पूर्णांक आंकडे असतात त्या आंकड्यांच्या संख्येंत एक उणा करून बाकी जी संख्या

राहते, तींच्या बरोबर असतो. जसें, ४०० ह्यांत तीन पूर्णांक आंकडे आहेत, म्हणून त्याच्या लागरथमांत २ पूर्णांक आहेत. म्हणून लागरथमांच्या कोष्टकांत पूर्णांक लिहिलेले नसतात.

$$१७५२ \text{ ह्यांचें लागरथम} = ३.२४३५३४.$$

$$१७५२ \dots\dots\dots = २.२४३५३४.$$

$$१७.५२ \dots\dots\dots = १.२४३५३४.$$

$$१.७५२ \dots\dots\dots = -०.२४३५३४.$$

$$.१७५२ \dots\dots\dots = -१.२४३५३४.$$

$$.०१७५२ \dots\dots\dots = -२.२४३५३४.$$

इ०

इ०

## प्रकरण १२.

### द्विपदसिद्धांत.

(२८). द्विपदसिद्धांताचे योगानें द्विपदाचा कोणताही घात बारंवार गुणाकार केल्याशिवाय आपणास करतां येतो.

अ+क्ष ह्या द्विपदाचा नघात करावयाचा आहे.

$$अ+क्ष = अ(१ + \frac{क्ष}{अ}), \therefore (अ+क्ष)^n = अ^n (१ + \frac{क्ष}{अ})^n;$$

अक्षीकल्पना करकीं अक्षु = य, आनि (१+य) न = अ, + बय + कय + डय + ... पय + इत्यादि ..... (१),

ह्यांत अ, ब, क, ड, इ, वेळाप्रकाशकांचा यव्या किमतीचीं कांहीं संबंध नाही.

ह्या समीकरणाच्या दोन्ही बाजूंचा वर्ग केल्याने,

$$(१+य)^२ = अ^२ + २अ,बय + २अ,कय + २अ,डय + २अ,इय + इत्यादि \\ + ब^२ + २ब,कय + २ब,डय + इत्यादि + क^२ + इत्यादि \dots (२).$$

आतां ∴ (१+य) न = (१+२य+य^२) न = {१+(२य+य^२)} न ∴ (१) ह्यांतील कल्पनेप्रमाणे,

$$(१+य)^२ = अ, + ब(२य+य^२) + क(२य+य^२) + ड(२य+य^२) + इत्यादि,$$

$$= अ, + २बय + बय^२ + ४कय + कय^२ + इत्यादि + ४डय + डय^२ + १६इय + इत्यादि \dots (३)$$

आणि ∴ (२) आणि (३) ह्या श्रेढींतील प्रत्येक = (१+य) न

$$\therefore अ + २अबय + (२अक + ब) य + (२अउ + २बक) य + \dots \dots \dots इ =$$

$$अ + २बय + (ब + ४क) य + (४क + ८उ) य + \dots \dots \dots इ =$$

$$\therefore (१६कल०प्र०) अ = अ, \therefore अ = १; २अ, ब = २ब, \therefore ब = ब;$$

$$२अ, क + ब = ब + ४क, \therefore क = \frac{ब - ब}{२} = \frac{ब(ब-१)}{१ \cdot २};$$

$$२अ, उ + २बक = ४क + ८उ, \therefore उ = \frac{२क(ब-२)}{६} = \frac{ब(ब-१)(ब-२)}{१ \cdot २ \cdot ३}; इ$$

$$मृणू, (१ + य) = १ + बय + \frac{ब(ब-१)}{१ \cdot २} य + \frac{ब(ब-१)(ब-२)}{१ \cdot २ \cdot ३} य + इ \dots \dots (४).$$

बयच्या पुढे जितकीं यदे आहेत, त्या सर्वांचे जागीं मय माडल्यानें,

$$(१ + य) = १ + बय + मय, \therefore (१७कल०प्र०) नलाग० (१ + य) = लाग० (१ + बय + मय),$$

आणि जर असें कल्पिलें कीं, लाग० (१ + य) = १ + यय + मय + इ०, ज्यांत १, य, म, इ०, वेळामकांचा यचे किंमतीशीं कांहीं संबंध नाही; तर

$$लाग० \{ १ + (बय + मय) \} = १ + य(बय + मय) + म(बय + मय)^२ + इत्यादि,$$

∴ नथ + नघय + नघय + इत्या० = थ + बघय + घमय + इत्यादि,

∴ (२६ कल० प्र०) नथ = थ, ∴ थ नघ = घब, ∴ ब = न; म्हणून, (४) ह्यांत बचे जागीन माडल्याने,

$$(१ + य)न = १ + नघ, \quad \frac{न(न-१)}{१ \cdot २} य + \frac{न(न-१)(न-२)}{१ \cdot २ \cdot ३} य + इत्यादि,$$

$$\text{म्हणजे, } \left(१ + \frac{य}{अ}\right)न = १ + न\frac{य}{अ} + \frac{न(न-१)}{१ \cdot २} \left(\frac{य}{अ}\right)^२ + \frac{न(न-१)(न-२)}{१ \cdot २ \cdot ३} \left(\frac{य}{अ}\right)^३ + इत्यादि,$$

$$\therefore (अ + क्ष)न = अ^n \left(१ + \frac{य}{अ}\right)न = अ^n + नअ^{न-१} \frac{य}{अ} + \frac{न(न-१)}{१ \cdot २} अ^{न-२} \frac{य^२}{अ^२} + \frac{न(न-१)(न-२)}{१ \cdot २ \cdot ३} अ^{न-३} \frac{य^३}{अ^३} + इत्यादि,$$

ह्यास सरं ऐजाकून्युटनचा द्विपद सिद्धांत म्हणतात.

कुरलरी १. क्षजरकृणअसेल तर त्याचे समघातांचीं घट्टे न होतील, आणि विषमघातांचीं कृण होतील;

$$\text{म्हणून, } (अ - क्ष)न = अ^n - नअ^{न-१} \frac{य}{अ} + \frac{न(न-१)}{१ \cdot २} अ^{न-२} \frac{य^२}{अ^२} - \frac{न(न-१)(न-२)}{१ \cdot २ \cdot ३} अ^{न-३} \frac{य^३}{अ^३} + इत्यादि.$$

$$\text{कुल० २. जर } अ = १, \text{ तर } (अ + क्ष)न = १ + नक्ष + \frac{न(न-१)}{१ \cdot २} क्ष^२ + \frac{न(न-१)(न-२)}{१ \cdot २ \cdot ३} क्ष^३ + इत्यादि.$$

$$\therefore (अ + ब + क)न = \{अ + (ब + क)\}^न \text{ आणि } (अ + ब + क + ड)न = \{(अ + ब) + (क + ड)\}^न$$

∴ हा द्विपदसिद्धांत, बहुतपदांचा देखील कोणताही घात करावयास लागू करता येईल .

वरील सिद्धता व्यापक आहे, म्हणून नवी किंमत पूर्णांक किंवा अपूर्णांक, धन किंवा ऋण, असली तरी ह्या सिद्धांताची योजना करता येईल .

ह्या सिद्धांताचा सूक्ष्मतेने विचार करून पाहिले असतां असें दिसते, कीं आरंभापासून अनुक्रमें पुढील सर्व पदांत अचा घात एकानें कमी होत जातो, आणि क्षचा घात एकानें अधिक होत जातो.

पहिलें पद द्विपदाच्या पहिल्या पदाचा न घात असतो . पहिल्या पदाचा घातप्रकाशक, एकोन घातप्रकाशक असें तें पहिलें पद, आणि द्विपदाचें दुसरें पद, ह्यांचा गुणाकार केल्यानें दुसरें पद काढतां येतें . पुढील कोणत्याही पदाचा वेळाप्रकाशक त्याच्या पाडीमागल्या पदांतील अच्या वेळाप्रकाशकास त्याच्याच घातप्रकाशकानें गुणून त्या गुणाकारास पदसंख्येनें (जीं पदे लिहिलीं असतील त्यांचे संख्येनें,) भागिलें असतां निघतो.

ह्या सिद्धांतानें द्विपद घातविस्तार करतांना असें लक्षांत येईल कीं जेव्हां नपूर्णांक आहे, तेव्हां द्विपदाच्या विस्तारांत  $n+1$  पदे येतात; आणि आद्यंत पदांपासून जीं पदे सारखे अंतरावर आहेत त्यांचे वेळाप्रकाशक बरोबर असतात. जेव्हां न अपूर्णांक आहे, तेव्हां शेवटीचा शेष शून्य होत नाही.

### उदाहरणें.

१.  $(अ+क्ष)$  ह्याचा षड्घात कर.

$$\begin{aligned} (अ+क्ष)^6 &= अ^6 + ६अ^५क्ष + \frac{६ \cdot ५}{२} अ^४क्ष^२ + \frac{६ \cdot ५ \cdot ४}{२ \cdot ३} अ^३क्ष^३ + \\ &\frac{६ \cdot ५ \cdot ४ \cdot ३}{२ \cdot ३ \cdot ४} अ^२क्ष^४ + \frac{६ \cdot ५ \cdot ४ \cdot ३ \cdot २}{२ \cdot ३ \cdot ४ \cdot ५} अक्ष^५ + \frac{६ \cdot ५ \cdot ४ \cdot ३ \cdot २ \cdot १}{२ \cdot ३ \cdot ४ \cdot ५ \cdot ६} क्ष^६ \\ &= अ^६ + ६अ^५क्ष + १५अ^४क्ष^२ + २०अ^३क्ष^३ + १५अ^२क्ष^४ + ६अक्ष^५ + क्ष^६. \end{aligned}$$

ह्यात विस्तार करतांना दुसऱ्या पदाच्या पुढल्या पदांचे वेळाप्रकाशक पुढीलप्रमाणे काढतात.  $\frac{६ \times ५}{२} = १५$ ,  $\frac{१५ \times ४}{३} = २०$ , आणि मध्यपदाच्या पुढें ते व्यस्तरीतीने लिहितात.

२. असें सिद्ध कर कीं  $(अ-क्ष)^५ =$

$$अ^५ - ५अ^४क्ष + १०अ^३क्ष^२ - १०अ^२क्ष^३ + ५अक्ष^४ - क्ष^५.$$



$$३. \text{ असें सिद्ध कर कीं } (अ-१)^७ = अ^७ - ७अ^६ + २१अ^५ - ३५अ^४ + ३५अ^३ - २१अ^२ + ७अ - १$$

$$४. \text{ असें सिद्ध कर कीं } (२१ + १)^१ =$$

$$२०१ + ८०१ + ८०१ + ४०१ + १०१ + १.$$

$$५. \text{ असें सिद्ध कर कीं } \frac{१}{(क+१)^२} = (क+१)^{-२} =$$

$$\frac{१}{क^२} (१ - \frac{२क}{क^२} + \frac{३क^२}{क^३} - \frac{४क^३}{क^४} + \frac{५क^४}{क^५} - \text{इत्यादि}).$$

$$६. \text{ असें सिद्ध कर कीं } \sqrt[३]{१-१} = (१-१)^{\frac{१}{३}} =$$

$$१ - \frac{१}{३} - \frac{१}{६} - \frac{५१}{८१} - \text{इत्यादि}.$$

## घातप्रकाशकसिद्धान्त

$$(२९). \because अ = १ + अ-१, \therefore अ^१ = (१ + अ-१)^१ =$$

$$\{(१ + अ-१)^१\}^{\frac{१}{१}};$$

$$\therefore (\text{द्विपदसि० कुरलप्र०}) अ^१ = \left\{ १ + न(अ-१) + \frac{न(न-१)}{२}(अ-१)^२ + \frac{न(न-१)(न-२)}{२ \cdot ३}(अ-१)^३ + इ० \right\}^{\frac{१}{१}};$$

$$= \{ १ + [(अ-१) - \frac{(अ-१)^२}{२} + \frac{(अ-१)^३}{३} - इ०] न + बने कने इ० \}^{\frac{१}{१}}$$

येथें (अ-१) ह्याचे घातांचीं जीं पदें न<sup>३</sup>, न<sup>२</sup>, इत्यादिकां-  
स गुणक येतात त्या पदांचे बेरजे बदल ब, क, इत्यादि  
पदें घेतलीं आहेत.

$$\text{आतां (अ-१)} - \frac{(अ-१)^२}{२} + \frac{(अ-१)^३}{३} - इ० = अ, \text{ ये, तर}$$

$$अ^क्ष = \left\{ १ + अ, न + ब न^२ + क न^३ + इ० \right\}^{\frac{क्ष}{न}} =$$

$$१ + \frac{क्ष}{न} (अ, न + ब न^२ + इ०) + \frac{क्ष(क्ष-१)}{२} (अ, न + ब न^२ + इ०)^२ + इ०,$$

$$= १ + क्ष(अ, + ब न + इ०) + \frac{क्ष(क्ष-१)}{२} (अ, + ब न + इ०)^२ + इ०;$$

आतां ∴ न पदास, कोणतीही किंमत दिली तरी हें समीकरण  
खरें आहे. न = ० ये, तर

$$अ^{\frac{क्ष}{न}} = १ + अ, क्ष + \frac{अ, क्ष^२}{१ \cdot २} + \frac{अ, क्ष^३}{१ \cdot २ \cdot ३} + इ०, \text{ ह्यास घात-}$$

प्रकाशक सिद्धान्त म्हणतात.

अची किंमत इ अशी धरली कीं अ, = १, तर

$$इ^{\frac{क्ष}{न}} = १ + \frac{क्ष}{१} + \frac{क्ष^२}{१ \cdot २} + \frac{क्ष^३}{१ \cdot २ \cdot ३} + \frac{क्ष^४}{१ \cdot २ \cdot ३ \cdot ४} + इत्यादि.$$

जर क्ष = १, तर

$$इ = 1 + \frac{1}{9} + \frac{1}{9 \cdot 2} + \frac{1}{9 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{1}{9 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} + \dots = 2.071625 \dots;$$

लागरथमांचा प्रथमकल्पक जो नेपीयर सोढेब त्यानें  
जीं लागरथमिक कोष्टकें तयार केलीं त्यांचा २.०७१६२५  
हा पाया आहे.

अक्ष = न ह्या समीकरणांत क्षची किंमत काढ.

दोंहों बाजूंचा ज्ञघात केल्यानें, अक्ष = न,

आणि दोनही बाजू घात प्रकाशक सिद्धांताप्रमाणें वाढ बिल्यानें,

$$1 + \frac{थक्षज्ञ}{9} + \frac{थक्षज्ञ^2}{9 \cdot 2} + \dots = 1 + \frac{न_१ज्ञ}{9} + \frac{न_१^२ज्ञ^2}{9 \cdot 2} + \dots,$$

$$येथें थ = (अ-१) - \frac{१}{२}(अ-१)^२ + \frac{१}{६}(अ-१)^३ - \dots,$$

$$\text{आणि } न_१ = (न-१) - \frac{१}{२}(न-१)^२ + \frac{१}{६}(न-१)^३ - \dots$$

ज्ञच्या समघातांच्या वेळा प्रकाशकांचें समीकरण केल्यानें,

$$थक्ष = न_१, \text{ म्हणजे } क्ष = \frac{न_१}{थ} =$$

$$\frac{(न-१) - \frac{१}{२}(न-१)^२ + \frac{१}{६}(न-१)^३ - \dots}{(अ-१) - \frac{१}{२}(अ-१)^२ + \frac{१}{६}(अ-१)^३ - \dots}$$

आतां अक्ष = न, म्हणून (२७ कल० प्र०) अ पायास

क्ष हें न संख्येचें लागरथम आहे. ह्या करितां कोणतेही  
पायास कोणतेही संख्येचें लागरथम बरील समीकरणानें



आतां  $r = \frac{1}{2p+1}$  घे, तर  $\frac{1+r}{1-r} = \frac{p+1}{p}$ , म्हणून

$$\text{लाग.अ.} \frac{p+1}{p} = \text{लाग.अ.}(p+1) - \text{लाग.अ.}p =$$

$$2\left\{ \frac{1}{2p+1} + \frac{1}{3(2p+1)^3} + \frac{1}{5(2p+1)^5} \right\},$$

$$\therefore \text{लाग.अ.}(p+1) = \text{लाग.अ.}p + 2\left\{ \frac{1}{2p+1} + \frac{1}{3(2p+1)^3} + \frac{1}{5(2p+1)^5} \right\}.$$

जेव्हा  $p$  संख्येचे लागर्थम माहीत आहे तेव्हा  $(p+1)$  ह्या संख्येचे लागर्थम वरील श्रेढीने काढता येते, आणि जसजशी  $p$  ची किंमत मोठी होते, तसतशी  $(p+1)$  ह्या संख्येचे लागर्थम वरील श्रेढीने लवकर निघते.

$$(३०). \quad \therefore a+b = \frac{a}{1 - \frac{b}{a+b}},$$

$$\therefore (a+b)^n = \frac{a^n}{\left(1 - \frac{b}{a+b}\right)^n} = a^n \left(1 - \frac{b}{a+b}\right)^{-n},$$

$$\therefore (२८ \text{ कल.प्र.०}), \quad (a+b)^n =$$

$$a^n \left\{ 1 + n \left( \frac{b}{a+b} \right) + \frac{n(n-1)}{2} \left( \frac{b}{a+b} \right)^2 + \dots \right\}.$$

ह्यास कोलसन साहेबांचा सिद्धांत म्हणतात.

## प्रकरण १३.

पाक्षिकविपर्यय, सार्वार्थिकविपर्यय, आणि संयोग.

(३१). किती एक पदांतून प्रत्येकवेळीं कांहीं नियमित पदे घेतलीं असतां, त्या पदांच्या ज्या भिन्न भिन्न रचना होतात त्यांस त्यांचे पाक्षिकविपर्यय म्हणतात.

जसें जर, अ, ब, क, ह्या तीन पदांतून दोन दोन पदे प्रत्येकवेळीं घेतलीं तर त्या तीन पदांचे पाक्षिकविपर्यय अब, बा, अक, का, बक, कब, होतील.

जर सगळीं पदे प्रत्येकवेळीं घेतलीं, तर जे त्यांचे पाक्षिक विपर्यय होतात त्यांस त्यांचे सार्वार्थिक याजक म्हणतात.

जसें अ, ब, क, ह्यांचे सार्वार्थिक विपर्यय अबक, अकब, बाक, बका, काब, कबा हे होतात.

(३२). जर न संख्याक भिन्नभिन्न पदांतून र संख्या क पदे प्रत्येकवेळीं घेतलीं तर त्यांचे पाक्षिकविपर्ययांची संख्या =  $n(n-1)(n-2)\dots(n-(r-1))$ .

अ, ब, क, उ, इ०, नसंख्याक पदे ये; तर  
एकेक पद घेतल्यानें त्यांचे पाक्षिकविपर्ययांची सं-  
ख्या न इहोल.

ह्या पदांतील (न-१) म्हणजे ब, क, उ, इ-  
त्यादि पदे घेऊन त्यांतून प्रत्येक पद घेतले, तर  
त्यांचे पाक्षिकविपर्ययांची संख्या (न-१) होईल;  
आणि त्या प्रत्येकाचे पूर्वी अलिहिला, तर न  
पदांतून प्रत्येकवेळीं, ज्यांत अ प्रथम पद आहे,  
अशीं दोन दोन पदे घेतल्यानें, न पदांचे (न-१)  
पाक्षिकविपर्यय होतील; ह्या प्रमाणेंच, ज्यांत ब  
प्रथम आहे, अशीं दोन दोन पदे प्रत्येकवेळीं घे-  
तलीं, तर न पदांचे (न-१) पाक्षिकविपर्यय हो-  
तील; आणि ह्या प्रमाणेंच सर्व न पदां  
ईल, म्हणून न पदांतून दोन दोन पदे प्रत्येकवे-  
ळीं घेतलीं असतां न पदांचे एकंदर पाक्षिकविप-  
र्यय न (न-१) होतील.

पुनः, बरील पदांतील (न-१) म्हणजे ब, क, उ,  
इत्यादि पदे घेऊन त्यांतून प्रत्येकवेळीं दोन दोन पदे  
घेतलीं तर बरचे प्रमाणें (न-१) पदांचे (न-१) (न-२)

इतके पाक्षिक विपर्यय होतील ; आणि पुढें वरल्या प्रमाणेंच कृति केल्यानें, न पदांतून प्रत्येक वेळीं तीन तीन पदे घेतलीं असतां न पदांचे पाक्षिक विपर्यय  $n(n-1)(n-2)$  होतील .

ह्याच प्रमाणें न पदांतून चार चार पदे प्रत्येक वेळीं घेतलीं तर न पदांचे पाक्षिक विपर्यय  $n(n-1)(n-2)(n-3)$  होतील .

म्हणून, जर न पदांतून १, २, ३, इत्यादि र पदे प्रत्येक वेळीं अनुक्रमें घेतलीं असतां न पदांचे जे पाक्षिक विपर्यय येतील, ते दाखवायास  $v_1, v_2, v_3,$  इत्यादि  $v_r$ , हीं अक्षरें घेतलीं, तर

$$v_1 = n, v_2 = n(n-1), v_3 = n(n-1)(n-2), \dots, v_r = n(n-1)(n-2) \dots \{n-(r-1)\},$$

कुरलः  $\therefore$  न पदांतून प्रत्येक वेळीं सगळीं पदे एकदम घेतलीं असतां जे त्यांचे पाक्षिक विपर्यय होतात, तेच त्यांचे सार्वत्रिक विपर्यय होतात;  $\therefore$  रचे जागीं न लिहिल्यानें (आणि सार्वत्रिक विपर्यय = पाल्यानें),

$$= n(n-1)(n-2) \dots \{n-(n-2)\} \{n-(n-1)\},$$



$$= n(n-1)(n-2) \dots 2 \cdot 1 = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \dots n.$$

(३३). आपण वर असें मानलें आहे कीं न संख्याक पदांतील प्रत्येक पद भिन्न भिन्न आहे; परंतु जेकां त्यांतील कांहीं पदे एकच आहेत, तेकां वर आणलेले सार्वशिक विपर्यय बराबर नाहीत, ह्या करितां त्यांत कांहीं फेरफार केला पाहिजे.

अ. आणि ब हीं पदे जेकां भिन्न आहेत, तेकां त्यांचे सार्वशिक विपर्यय अ.ब, ब.अ, आहेत; परंतु जेकां हीं पदे एकच आहेत, तेकां त्यांचा सार्वशिक विपर्यय अ.अ आहे. म्हणून  $n$  संख्याक पदांतील प्रत्येक पद भिन्न भिन्न आहे असें मानू. दोन पदे सार्वशिक विपर्यय त्यांस, जेकां त्यांतील दोन पदे अ, ब, सारखीच होतात, म्हणजे अ = ब ह्या होनीं भागिलें पाहिजे; कांकीं पदरचनेंतील प्रत्येक पदांत अ, ब, हीं दोन्ही पदे जेकां सारखीं होतील, तेकां पदरचनेंतील प्रत्येक पद दोनदां आलें असें होतें.

आणि पुनः, जेकां न संख्याक पदांतील अ, ब, क, हीं पदे भिन्न भिन्न आहेत, तेकां पदरचनेंत

हीं पदे क्रमभेदानें सा हा वेळ, म्हणजे  $२ \times ३$  वेळ येतात;  
 म्हणून जेव्हां अ, ब, क, हीं पदे सारखींच होतात, म्हणजे  $अ = ब$   
 $= क$ , तेव्हां प्रत्येक पद भिन्न आहे असें मानून आणले  
 ल्या न संख्याक पदांचे सार्वशिक विपर्ययांस  $२ \times ३$   
 ह्यांनी भागिलें पाहिजे; म्हणजे जेव्हां  $अ = ब = क$  तेव्हां  
 जे न संख्याक पदांचे सार्वशिक विपर्यय ते =  $\frac{n}{२}$ , तर  

$$प = \frac{n(n-१)(n-२) \cdots ३ \cdot २ \cdot १}{२ \cdot ३} = n \cdot (n-१) \cdot (n-२) \cdots ४.$$

आणखी असें मान कीं, न संख्याक पदांतील र सं-  
 ख्याक पदे सारखीं आहेत. आतां जर प्रत्येक पद भिन्न  
 भिन्न असतें तर न संख्याक पदांचे सार्वशिक विपर्यय  
 $n \cdot (n-१) \cdot (n-२) \cdots ३ \cdot २ \cdot १$  झाले असते, आणि पद-  
 रचनें पाहिले तेव्हा  $n \cdot (n-१) \cdot (n-२) \cdots ३ \cdot २ \cdot १$  झाले असते, आणि पद-  
 यांजक ही र संख्याक पदे क्रमभेदानें, त्यांचे जे सार्व-  
 शिक विपर्यय  $१ \cdot २ \cdot ३ \cdots r$ , इतके वेळां आलीं असतीं;  
 म्हणून जेव्हां हीं र संख्याक पदे सारखींच होतात, ते-  
 व्हां प्रत्येक पद भिन्न आहे असें मानून आणलेले जे  
 न संख्याक पदांचे सार्वशिक विपर्यय, त्यांस  $१ \cdot २ \cdot ३ \cdots$   
 र ह्यांनी भागिलें पाहिजे; म्हणजे, जेव्हां र संख्याक  
 पदे सारखींच आहेत, तेव्हां जे न संख्याक पदांचे सार्व-

शिक विपर्यय ते = प, तर

$$प = \frac{१ \cdot २ \cdot ३ \cdot ४ \cdot \dots \cdot न}{१ \cdot २ \cdot ३ \cdot \dots \cdot ३}$$

कुर जेकां न संख्याक पदांतर संख्याक पदे सा-  
रखी असून दुसरीं क संख्याक ही पदे सारखी आहेत ,  
तेकां जे न संख्याक पदांचे सार्वशिक विपर्यय येतील  
ते = प, तर वरचे प्रमाणेच

$$प = \frac{१ \cdot २ \cdot ३ \cdot ४ \cdot \dots \cdot न}{१ \cdot २ \cdot \dots \cdot र \cdot १ \cdot २ \cdot \dots \cdot क}$$

(३४). जेकां न संख्याक पदांतील काण ते ही एक प-  
द, किती एक पदे, किंवा सर्व पदे पुनः पुनः घेतां येतात,  
तेकां जे न संख्याक पदांचे पाक्षिक विपर्यय त्यांस —  
आहुत्त पाक्षिक विपर्यय म्हणतात. जसें अ, ब,  
क, ह्या तीन पदांतील प्रत्येकाचे पूर्वी एक,  
लिहिले, तर ज्यांत अ पद पूर्वी आहे असे अअ, अब,  
अक, तीन पाक्षिक विपर्यय होतील; आणि ह्या प्रमाण  
च ज्यांत ब पूर्वी आहे असे, बअ, बब, बक, तीन पाक्षिक  
विपर्यय होतील, आणि क ज्यांत पूर्वी आहे असे,  
कअ, कब, कक, तीन पाक्षिक विपर्यय होतील; म्ह-  
णून दोन दोन पदे प्रत्येक वेळीं घेतल्यानें, अ, ब, क,

ह्या तीन पदांचे एकंदर पाक्षिकविपर्यय  $3 \times 3$ , म्हणजे  $3^2 = 9$ , होतील.

ह्या प्रमाणेंच जर नसंख्याक पदांतील प्रत्येक वेळीं दोन दोन पदें घेतलीं, तर ज्यांत अ प्रथमतः येईल असे न पाक्षिकविपर्यय होतील, बऱ्यांत प्रथमतः येईल, असे नच पाक्षिकविपर्यय होतील, आणि असेंच नसंख्याक पदांतील प्रत्येक पदाविषयीं होईल, म्हणून न पदांचे एकंदर आवृत्त पाक्षिकविपर्यय,  $n \times n = n^2$  होतील.

प्रत्येकवेळीं दोन दोन पदें घेतलीं तर न पदांचे आवृत्त पाक्षिकविपर्यय न होतात, आतां जर प्रत्येक पाक्षिकविपर्ययाचे पूर्वीं न पदांतील प्रत्येक याजकें तर, बरंचे प्रमाणें प्रत्येकवेळीं तीन तीन पदें घेतलीं असतां नसंख्याक पदांचे एकंदर पाक्षिक विपर्यय  $n \times n^2 = n^3$  होतील.

ह्या प्रमाणेंच जर प्रत्येकवेळीं न पदें घेतलीं, तर न पदांचे आवृत्त पाक्षिकविपर्यय  $n^n$  होतील.

आतां जर एकएकदां, दोन एकदां, तीन एकदां, इत्यादि, न एकदां घेतल्यानिं नसंख्याक पदांचे एकंदर

आवृत्त पाक्षिक विपर्यय किती होतील हे का-  
ढणें आहे तर,  $n + n + n + \dots + n = n \left\{ \frac{n-1}{n-1} \right\}$  हे  
पद घ्यावें म्हणजे झालें.

(३५). कांहीं वस्तू घेऊन क्रमाकडे लक्ष्य न ठेवितां  
जे भिन्न भिन्न समुदाय होतात त्यांस त्या पदांचे सं-  
योग म्हणतात. जसें, अ, ब, क, ह्या पदांतून प्र-  
त्येकवेळीं दोन दोन पदें घेतल्यानें त्यांचे संयोग अब,  
अक, बक, होतात

आतां अ, ब, ह्या दोन पदांचे सार्वशिक विप-  
र्यय अब, बअ, असे दोन होतात, परंतु ह्यांचा सं-  
योग अब एकच होतो, आणि असेंच अ, ब, क, ह्या  
चे सार्वशिक विपर्यय ६ होतात, परंतु ह्यांचे संयोग  
एकच होतो. जर प्रत्येकवेळीं दोन दोन पदें घेत-  
तर न पदांचे पाक्षिक विपर्यय  $n(n-1)$  होतात, पर-  
ंतु दोन पदांचा संयोग एकच होतो, आणि त्यांचे सार्व-  
शिक विपर्यय दोन होतात, म्हणून दोन दोन पदें प्रत्येक  
वेळीं घेतलीं असतां, न पदांचे संयोग  $= k = \frac{n(n-1)}{2}$ .

उनः, जर प्रत्येक वेळीं तीन तीन पदें घेतलीं तर  
न पदांचे पाक्षिक विपर्यय  $n(n-1)(n-2)$  होतात,

परंतु अ, ब, क, ह्यांचा संयोग एकच होतो, आणि  
सार्वांशिक विपर्यय  $२ \times ३$  होतात, म्हणून प्रत्येक वेळीं  
तीन तीन घेतलीं असतां,

$$न पदांचे संयोग = क_३ = \frac{n(n-1)(n-2)}{२}.$$

वरचे प्रमाणेंच विचार करून पाहिलें असतां  
असें दिसतें कीं, प्रत्येक वेळीं र पदे घेतलीं. आणि  
न संख्याक पदांचे संयोग = क\_२, तर

$$क_२ = \frac{n(n-1)(n-2)\dots\{n-(२-१)\}}{१ \cdot २ \cdot ३ \dots २}.$$

कुर०. र पदांचे संयोग जर अनुक्रमे १, २, ३, ४,  
इत्यादि पदे घेतलीं, तर

$$क_१ = \frac{n}{१}, क_२ = \frac{n(n-1)}{१ \cdot २}, क_३ = \frac{n(n-1)(n-2)}{१ \cdot २ \cdot ३}, इ०;$$

$$याजबा + क_३ + इ० = n + \frac{n(n-1)}{१ \cdot २} + \frac{n(n-1)(n-2)}{१ \cdot २ \cdot ३} + इ०,$$

$$\text{परंतु } (२० \text{ कल० प्र०}), (१+क्ष)^n =$$

$$१ + नक्ष + \frac{n(n-1)}{१ \cdot २} क्ष^२ + \frac{n(n-1)(n-2)}{१ \cdot २ \cdot ३} क्ष^३ + इ०,$$

$$\therefore (१+१)^n = २^n = १ + n + \frac{n(n-1)}{१ \cdot २} + \frac{n(n-1)(n-2)}{१ \cdot २ \cdot ३} + इ०,$$

$$\therefore २^n - १ = n + \frac{n(n-1)}{१ \cdot २} + \frac{n(n-1)(n-2)}{१ \cdot २ \cdot ३} + इ०,$$

∴ क<sub>१</sub>+क<sub>२</sub>+क<sub>३</sub>+इ०=२-१=१ नै पदांतून एक,  
दोन, तीन, इत्यादि न अनुक्रमें प्रत्येक वेळीं घेत-  
ल्यानें जे त्यांचे संयोग होतात त्या सर्वांची बेरीज.

(३६). ज्यांत अनुक्रमें प, क, र, इ० संख्याक  
पदे आहेत, अशा न रांगी आहेत, आणि प्रत्येक  
संयोगास प्रत्येक रांगींतून एक एक पद घेतलें, तर  
एकंदर संयोग=प, क, र, इ० ह्या सर्व पदसंख्यां-  
चा गुणाकार.

∴ असें समज कीं ज्यांत अनुक्रमें प संख्याक  
आणि क संख्याक पदे आहेत अशा दोन रांगी आ-  
हेत. तर हें स्पष्ट आहे कीं जर पहिले रांगेंतील को-  
णतेंही एक पद घेऊन तें आणि दुसरीं तील प्रत्येक  
पद ह्यांचा संयोग केला, तर एकंदर संयोग  
ल; म्हणून पहिलींतील प्रत्येक पद आणि दुसरांता-  
ल प्रत्येक पद ह्यांचा संयोग केला, तर एकंदर सं-  
योग पक होतील. पुनः, जर र संख्याक पदांची  
तिसरी एक रांग असेल, तर हींतील प्रत्येक पद आ-  
णि दुसऱ्या दोन रांगांतील प्रत्येक संयोग ह्यांचा सं-  
योग केल्यानें पक संयोग होतील; म्हणून प्रत्येकींतून

एक एक पद घेऊन त्यांचा संयोग केला, तर एकंदर संयोग पंक्कर होतील; आणि ह्या प्रमाणेच जर स संख्याक पदांची चौथी एक रांग असेल, तर प्रत्येकींतून एक एक पद घेऊन त्यांचा संयोग केल्याने एकंदर संयोग पंक्कर स होतील; आणि ह्या प्रमाणेच पुढील सर्व रांगींविषयीं होईल.

कुर०. जर  $p = क = र = इ$ ; तर प्रत्येकींतून एक एक पद घेऊन त्यांचा संयोग केल्याने एकंदर संयोग = प.

(३७). न पदांतून प्रत्येकवेळीं र पदे घेतल्याने जे एकंदर संयोग होतात ते, न च पदांतून प्रत्येकवेळीं  $n - र$  पदे घेतल्याने जे एकंदर संयोग होतात, त्याजबराबर असतात.

असें मान कीं पहिले एकंदर संयोग =  $n क_r$ , आणि दुसरे एकंदर संयोग =  $n क_{n-र}$ ,

तर (३५ कलप०),  $n क_r = \frac{n(n-1)(n-2) \dots (n-r+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots r}$  ;

आणि  $n क_{n-र} = \frac{n(n-1)(n-2) \dots \{n-(n-र)+1\}}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (न-र)}$ ,

$= \frac{n(n-1)(n-2) \dots (र+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (न-र)}$ ,



$$= \frac{n(n-1)(n-2) \cdots (n-r+1) \cdot (n-r) \cdots (r+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots r \cdot (r+1) \cdots (n-r)}, \because \text{जर } r < n-r$$

$$= \frac{n(n-1)(n-2) \cdots (r+1) \cdot r \cdots (n-r+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (n-r) \cdot (n-r+1) \cdots r}, \because \text{जर } r > n-r$$

$$\therefore \text{कोणत्याही कल्पनेने, } = \frac{n \cdot (n-1)(n-2) \cdots (n-r+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots r} = n \text{ क्र.}$$

(३८). मं पदांची एक आणि न पदांची एक अशा दोन रांगी आहेत, आणि प्रत्येक संयोगास पहिलीं नून र पदे आणि दुसरीं नून सं पदे घेतलीं, तर एकंदर किती संयोग होतील हे काढावयाचे.

$$(३५ \text{ क० प्र०}), n \text{ क्र.} \times n \text{ क्र.} = \frac{n(n-1) \cdots (n-r+1)}{1 \cdot 2 \cdots r}$$

$$\times \frac{n(n-1) \cdots (n-r+1)}{1 \cdot 2 \cdots n} =$$

(३९). न पदांचे संयोग बहुतम होण्यास न पदां-  
नून प्रत्येक वेळीं र ही संख्या किती घ्यावी हे काढाव-  
याचे.

$$\text{आतां } \because n \text{ क्र.} = n \text{ क्र.} \cdot \left( \frac{n-r+1}{r} \right), \therefore \text{जेंपर्यंत } (n-r+1) > r,$$

तेंपर्यंत  $n \text{ क्र.}$  हे पद वाढत जाईल; म्हणून जेव्हा

न-र+१=र, किंवा र+१, तेव्हां मात्र न कर घ्याची किंमत बहुतम होईल; आतां रची किंमत तर पूर्णांक असली पाहिजे आणि जर नही विषमसंख्या आहे, तर न-र+१=र, म्हणजे र= $\frac{1}{2}(न+१)$  हे घेतले पाहिजे, आणि तेव्हा न कर = न कर-१. यावरून असें ठरितें कीं जेव्हा र= $\frac{1}{2}(न+१)$  इतकी पदे न परंतून प्रत्येकवेळीं घ्याचीं तेव्हां न वस्तूंचे संयोग बहुतम होतील; आणि जेव्हा प्रत्येकवेळीं र-१, म्हणजे  $\frac{1}{2}(न-१)$ , इतकी पदे घ्यावीं तेव्हां ही न वस्तूंचे संयोग बहुतम होतील.

परंतु जेव्हां न ही समसंख्या आहे, तेव्हां न-र+१ = र+१, म्हणजे र= $\frac{1}{2}न$ , असें घेतल्यानें रची किंमत पूर्णांक निघेल; म्हणजे जेव्हां नही समसंख्या आहे तेव्हां प्रत्येकवेळीं  $\frac{1}{2}$  इतकी पदे घेतलीं असतां न वस्तूंचे संयोग बहुतम होतील.

### उदाहरणे

१. १० घंटांतून प्रत्येकवेळीं जर ७ घंटा घेतल्या, तर त्यांचे निरनिराळ्या प्रकारचे किती नाद निघतील? (पाक्षिकविपर्यय, ३२ कलमप्रमाणें),

$$व_r = n(n-1)(n-2)\dots\{n-(r-1)\};$$

आणि  $\therefore 90$  घंटा आहेत,  $\therefore n=90$ ,

आणि  $\therefore$  त्यांमून प्रत्येक वेळीं ७ घेतल्या आहेत,

$$\therefore r=7, \text{ आणि } r-1=6, \therefore n-(r-1)=90-6=84,$$

$$\therefore व_7 = 90 \cdot 89 \cdot 88 \cdot 87 \cdot 86 \cdot 85 \cdot 84 = 6085000, \text{ इतके प्रकार.}$$

२. एका वर्गांत ६ मुलें आहेत, तीं क्रमभेदानें किती वेळां आप आपल्या जागा पालटतील?

(सांख्यिक विषय, अकलंकुरप्र०),  $p=1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n$ ,

$$\therefore p = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 = 720 \text{ वेळां.}$$

३. किती निरनिराळ्या प्रकारांनीं इनयुनकए-एट ए ओन हीं अक्षरें लिहितां येतील?

$$(\text{सांख्यिक विषय, अकलंकुरप्र०}), p = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \dots n}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \dots k};$$

आणि  $\therefore 99$  अक्षरें आहेत, त्यांत ३ वेळन आणि २ वेळ ऐ आहे.

$$\therefore n=99, r=3, k=2,$$

$$p = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10 \cdot 11}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} = 3326400 \text{ इतके प्रकार.}$$

४. एका दशाकोनाकृतींत ह्या कोनापासून त्या कोनापर्यंत रेघा काढल्यानें किती भिन्न भिन्न त्रिकोण

होतील?

दाहा कोनांपैकीं सात कोन प्रत्येकवेळीं सांघाव-  
यास जिनक्या रेघा काढाव्या लागतील तितके त्रिको-  
ण होतील; म्हणजे, दाहा कोनांतून सात कोन प्रत्येक  
वेळीं घेतल्यानें जितके संयोग होतील तितकेच त्रि-  
कोण होतील.

$$\therefore (\text{संयोग, ३५६० प्र०}), k = \frac{n(n-1)(n-2) \dots (n-(r-1))}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots r},$$

$$= \frac{90 \cdot 89 \cdot 88 \cdot 87 \cdot 86 \cdot 85 \cdot 84}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7} = 920.$$

५. २१ वस्तूंतून प्रत्येकवेळीं अनुक्रमें १, २, ३, ४, ५, ६, ७, ८, ९, १०, ११, १२, १३, १४, १५, १६, १७, १८, १९, २०, २१ वस्तू घेतल्यानें जे एकंदर संयोग होतात ते: २१ वस्तूंतून प्रत्येकवेळीं अनुक्रमें १, २, ३, ४, ५, ६, ७, ८, ९, १०, ११, १२, १३, १४, १५, १६, १७, १८, १९, २०, २१ वस्तू घेतल्यानें जे एकंदर संयोग होतात ते: १२९: १; तर नवी किंमत काढ.

(संयोग, ३५६० कुर० प्र०),  $r=1$ ; येथें न बदल २१ लिही, तर

$r=1 = २१ वस्तूंचे एकंदर संयोग,$

$r=1 = १ \dots \dots \dots$

$$\therefore \frac{r-1}{r-1} = \frac{१२९}{१}, \quad \frac{(r+1)(r-1)}{r-1} = \frac{१३०}{१},$$

$२+१=१२९$ ,  $३=१२८$ ,  $४=२७$ ,  $\therefore n=७$ . उत्तर.

६. एक १९ व्यंजनांची आणि दुसरी ५ स्वरांची अशा दोन रांगी आहेत, तर ३ व्यंजने आणि २ स्वर असे पांच वर्ण प्रत्येक वेळी घेतल्यास किती निरनिराळे वर्णसमुदाय होतील ?

(संयोग, ३५, ३८ कल० प्र०),  $m$  क<sub>२</sub>  $\times$   $n$  क<sub>३</sub> =

$$\frac{m(m-1)\cdots(m-r+1)}{१\cdot २\cdots r} \times \frac{n(n-1)\cdots(n-s+1)}{१\cdot २\cdots s},$$

येथे  $m=१९$  व्यंजने,  $n=५$  स्वर  $\left\{ \begin{array}{l} m-r+1=१७, \\ r=३ \cdots \cdots s=२ \cdots \cdots n-s+1=४, \end{array} \right.$

$$\therefore m \text{ क}_२ \times n \text{ क}_३ = \frac{१९\cdot १८\cdot १७}{१\cdot २\cdot ३} \times \frac{५\cdot ४}{१\cdot २} =$$

$$९६९ \times १० = ९६९० \text{ समुदाय.}$$

परंतु एकेका समुदायामध्ये पांच पांच अक्षरे आहेत, आणि ती ५०४३२०१ इतके वेळां भिन्नभिन्न क्रमाने लिहिता येतील; म्हणून

(सा० वि० ३२ क० कुर० प्र०),  $p=n(n-1)\cdots ३\cdot २\cdot १$ .

येथे  $n=५$ ,  $\therefore p=५\cdot ४\cdot ३\cdot २\cdot १=१२०$  = प्रत्येक समुदायाचे सांख्यिक विपर्यय

∴ ९६९० × १२० = ११६२८०० वर्णसमुदाय. उत्तर

७. एका टेलिग्राफ नामक यंत्रास म दांडे आहेत, आणि प्रत्येक दांडा न भिन्न भिन्न ठिकाणी लावता येतो; तर त्या टेलिग्राफने एकंदर किती खुणा करता येतील?

(संयोग, ३५ कलंकुर. प्र०), प्रथमतः १ एकदां, २ एकदां, ३०, घेतल्याने म दांड्यांचे किती संयोग होतात ते काढ.

$$मक_१ = म, मक_२ = \frac{म(म-१)}{१.२}, मक_३ = \frac{म(म-१)(म-२)}{१.२.३}, इ०;$$

$$\therefore मक_१ + मक_२ + मक_३ + इ० =$$

$$म + \frac{म(म-१)}{१.२} + \frac{म(म-१)(म-२)}{१.२.३} + इत्यादि =$$

प्रथमतः १ एकदां, मग २ एकदां, मग ३ एकदां, इ० घेतल्याने, म दांड्यांचे जे एकंदर संयोग होतात ते, परंतु प्रत्येक दांडा न भिन्न भिन्न ठिकाणी लावता येतो, म्हणून न ठिकाणांच्या आदलाबदली सदां एकंदर संयोग =  $मन + \frac{म(म-१)}{१.२} न^२ + \frac{म(म-१)(म-२)}{१.२.३} न^३ + इ० =$

$$(१+न)^म - १. \therefore (२८ कलम ३५ कुर. प्र०).$$

※ ह्या यंत्राने बालमी फार जलद पोंचवितां येते.

८ पांच घंटांनीं भिन्न भिन्न प्रकारचे किती नाद काढतां येतील? उत्तर. १२०

९. एक एकाचा, दोन दोहोंचे, तीन तिहींचे, चार चोंहोंचे, हे आंकडे प्रत्येक संख्येत आणले असता त्यांच्या भिन्न भिन्न किती संख्या होतील?

उत्तर. १२६००

१०. आठ घंटांतून प्रत्येकवेळीं चार चार घंटा घेतल्या, तर त्यांनीं निरनिराळ्या प्रकारचे किती नाद काढतां येतील? उत्तर. १६८०.

११. २न+१ वस्तूंतून प्रत्येकवेळीं न-१ वस्तू घेऊन जे पाक्षिकविपर्यय येतात ते : २न-१ वस्तूंतून प्रत्येकवेळीं न वस्तू घेऊन जे पाक्षिकविपर्यय येतात ते :: ३ : ५ ; तर नची किंमत काढ. उत्तर ५.

१२. बाबन्स गंजिफांतून दरवेपेस हातांत तेरा तेरा धरल्या, तर त्यांत कितीवेळां आदलाबदल करतां येईल? उत्तर. ६३५०१३५५ ९६००

१३. एका टोळींत ५ शिपाई आहेत, आणि त्यांतून पाहाण्यावर प्रत्येक रात्री चार चार शिपाई पाठविले, तर पहिल्या चारही शिपायांची पुनः पाळी नयेतां,

किती रात्री वेगवेगळे शिपाई धाडतां येतील ?

उत्तर. २३०३००

१४. १६ वस्तूतून एका रवेपेस १, दुसऱ्या रवेपेस २, तिसऱ्या रवेपेस ३, इ० वस्तू घेतल्या असता त्यांचे एकंदर संयोग किती होतील ? उत्तर. ६५५३५.

१५. दर रवेपेस दोन दोन वस्तू घेतल्याने, म+न वस्तूंचे ५६ पाक्षिकविपर्यय होतात आणि तिनक्या च घेतल्याने म-न ह्या वस्तूंचे १२ पाक्षिकविपर्यय होतात ; तर म वस्तूतून दर रवेपेस न वस्तू घेतल्या असता त्यांचे किती संयोग होतील ? उत्तर. १५.

१६. १२ वस्तू आहेत, त्यांतून दरवेळीं ५ वस्तू घेतल्या असता त्यांचे आठवण पाक्षिकविपर्यय किती होतील ? उत्तर. २४८८७२.

१७. न वस्तूत प एका जातीच्या आहेत, क एका जातीच्या आहेत, र एका जातीच्या आहेत, इत्यादीनेक वस्तू अनेक जातीच्या आहेत ; तर असें सिद्ध कर कीं त्यांतून पहिल्या रवेपेस १, दुसऱ्या रवेपेस २ इत्यादि नव्या रवेपेस न घेतल्या असता, त्यांचे सर्वभिन्नभिन्न संयोगांची संख्या =  $(प+१)(क+१)(र+१), इ०$ .



१८. ४० शिपायांची एक, ४२ शिपायांची एक,  
 ४५ शिपायांची एक, आणि ५० शिपायांची एक,  
 अशा चार टोळ्या आहेत; दर एक टोळीतून एकेक  
 शिपाई घेतला असता, प्रथमतः जे चार शिपाई घे-  
 तले ते पुनः न घेतां, किती वेळां चार चार निरनिराळे  
 शिपाई घेतां येतील? उत्तर. ३७८००००.

### प्रकरण १४.

चक्रवाटव्याज आणि प्राप्ति.

(४०). उसना दिलेला पैसा म्हणजे मुद्दल = ५ पोंड ये,  
 रास म्हणजे व्याज मुद्दलांची बेरीज = म .....  
 पहिल्या मुदतीचे १ पोंडाचे व्याज = र, .....  
 त्याच मुदतीची एका पोंडाची रास =  $(१+र)$  = र,  
 मुदतीची संख्या = न.

तर पहिल्या मुदतीचे अंती १ पोंडाची रास र  
 पोंड होतील, आणि र पोंड हें दुसऱ्या मुदतीचे मु-  
 दल होईल.

$\therefore १:र :: र : र^१ =$  दोन मुदतींत एका पोंडाची रास,  
 घाप्रमाणेंच  $१: र^१ :: र : र^२ =$  तीन.....

आणि असेंच पुढेंही.  $\therefore र^n =$  न मुदतींत १ पोंडाची रास;  
 आणि जेव्हां मुदल प पोंड आहे, तेव्हां त्याची रास १ पोंड  
 उ मुदलाच्या राशीच्या प पट होईल.  $\therefore म = पर^n$ ,  
 $\therefore (२७ क प्र०)$ ,  $लाग० म = लाग० म + (लाग० र) \times न$ .

प, म, न, र ह्या चार पदांतून कोणतींही तीन पदे दिलीं असतां बरील समीकरणे पासून चवथें पद काढतां येईल.

(४१)  $\text{अ} \cdot \text{कजीं दिलेल्या पैशाचें व्याज, घराचें किंवा जमिनीचें भाडें, पेनवान, किंवा चाकरीचा पैसा, वगैरे वर्षास घ्यावयाचा जो पैसा त्यास प्राप्ति म्हणतात. प्राप्ति दारववायास अ पोंड घे, आणि एक पोंडाची एक वर्षाची रास दारववायास र घे; तर पहिल्या वर्षाचे अंती प्राप्तीची रास अ आहे, आणि अच दुसऱ्या वर्षाचें मुदल आहे.}$

$\therefore १: अ :: र : अर =$  त्याची दुसऱ्या वर्षाच्या अंतीची रास,  
 $\therefore अ + अर = अ(१ + र) =$  दुसऱ्या वर्षाचे अंती एकंदर पैसायेणें

असेंच  $१:अ(१+र)::र:अ(र+र^२)=$  त्याची ति-  
सव्या वर्षाचे अंतीची रास,

$\therefore अ+अ(र+र^२)=अ(१+र+र^२)=$  तिसऱ्या  
वर्षाचे अंती एकंदर पैसा येणें तो;

ह्याच प्रमाणें  $अ(१+र+र^२+र^३)=$  चवथ्या वर्षा-  
चे अंती पैसा येणें तो; आणि सामान्यतः

$अ(१+र+र^२+\dots+r^{n-१})=अ\frac{r^n-१}{r-१}=$  चक्रबाढव्या-  
जानें न वर्षाचे अंती प्राप्तीचा एकंदर पैसा येणें तो  
 $=$  मधे;

$$\text{लाग.म} = \text{लाग.अ} + \text{लाग.}(r-१) - \text{लाग.}(r-१).$$

(४२). अ प्राप्तीची सांप्रत किंमत दारवबाकें गस बघे, तर

$$(४०, ४१ क.प्र०), वर  $r^n = अ \times \frac{r^n-१}{r-१}, \therefore व = अ \frac{१-r^n}{r-१}$$$

$$\therefore \text{लाग.व} = \text{लाग.अ} + \text{लाग.}(१-r^n) - \text{लाग.}(r-१).$$

कुर०. जर प्राप्ति सतत चालावयाची आहे,  
तर नवी किंमत अनंत आहे,

$$\therefore r^n = \frac{१}{r^n} = ०,$$

आणि  $व = \frac{अ}{r-१} =$  दरसाल अ पोंड अशा

सतत चालणाऱ्या प्राप्तीची सांप्रत किंमत.

(४३). जर अ. प्राप्ति म वर्षांनंतर चालू होऊन न वर्षेपर्यंत चालावयाची आहे, तर तिची सांप्रत किंमत, ती म+न वर्षेपर्यंत चालली असता जी तिची सांप्रत किंमत होईल तींत ती म वर्षेपर्यंतच चालावयाची असता जी तिची सांप्रत किंमत होईल ती वजा देऊन जी बाकी राहिल, तिज बरा बर होईल; म्हणजे

$$\begin{aligned}
 व &= अ \frac{1-r^{-(m+n)}}{r-1} - अ \frac{1-r^{-m}}{r-1} = \frac{अr^{-m} - अr^{-m-n}}{r-1}, \\
 &= \frac{अr^{-m}(1-r^{-n})}{r-1};
 \end{aligned}$$

$$\text{लाग. व} = \text{लाग. अ} \cdot \text{म लाग. र} + \text{लाग. (१-r)} \cdot \text{लाग. (१-१)}.$$

कुर०. जर प्राप्ति सतत चालावयाची असेल, तर न अनंत होईल,

$\therefore r^{-n} = 0$ , आणि  $व = \frac{अr^{-m}}{r-1}$  = कांहीं वर्षांनंतर चालू होऊन पुढे सतत चालणाऱ्या प्राप्तीची सांप्रत किंमत.

उदाहरणे.

१. दर वर्षास व्याजाचा हिशेब करण्याचा क-

रार आहे, तर दरसाल दरदोंकडा  $४\frac{1}{2}$  पोंड व्याजा  
प्रमाणें १२ वर्षांत चक्रवाढव्याजांन ५००० पोंड रा-  
स होण्यास किती पोंड मुद्दल असावे?

(४०कंप्र), लाग०प = -नलाग०र + लाग०म

$$= -१२लाग०(१००४५) + लाग०५००६$$

$$\text{आतां लाग०}(१००४५) = ०.०१९११६३$$

१२

$$०.२२९३९५६, (१)$$

$$\text{लाग० } ५००० = ३.६९८९७००, (२)$$

$$\text{लाग० प} = ३.४६९५७४४ \therefore (२) - (१)$$

$$\therefore \text{प} = २९४८.३१८६ = २९४८ \text{ पोंड } \frac{१}{२} \text{ पेन्स. उत्तर.}$$

टीप. येथें (२) घातून (१) हें वजा केले आहे. प-

रंतु बहुत लागरथमिक संख्यांचे बेरीजेंतून एक ला-

गरथमिक संख्या किंवा बहुत लागरथमिक संख्यांचे

बी बेरीज वजा करणें झाल्यास, लिहिण्यास व कृति

करण्यास फार अवघड पडतें; म्हणून ज्या लागर-

थमिक संख्या वजा करायाच्या असतील त्यांतील

प्रत्येकीचें <sup>\*</sup>कॉम्प्लिमेंट घेऊन तें लिहावें, म्हणजे सर्व

\*. लागरथमिक संख्या शून्यांत वजा करून जी बाकी, तिला

लागरथमिक संख्यांची एकंदर बेरीज करतां येते.

जसें, बरील उदाहरणांत,

$$\text{कांष्ठिमें. लाग. (१००४५)} = १.९८०८८३७$$

१२

$$= १.७७०६०४४$$

$$\text{लाग. ५०००}$$

$$= ३.६९८९७००$$

$$\text{लाग. ५}$$

$$= ३.४६९५७४४.$$

२. दर वर्षास व्याजाचा हिशेब करण्याचा करार आहे, तर चक्रवाढ व्याज दरसाल दरशेंकडा ४  $\frac{१}{२}$  पोंडां प्रमाणें २० वर्षांत १०० पोंड वार्षिक प्राप्तीची रास किती पोंड होईल ?

$$\begin{aligned} (\text{४१व ४०}) \text{लाग. म} &= \text{लाग. (२-१)} + \text{लाग. अ} - \text{लाग. (२-१)}, \\ &= \text{लाग. (१.०४९-१)} + \text{लाग. १००} - \text{लाग. (००४५)} \end{aligned}$$

$$\text{आतां, लाग. (१.०४५)} = ०.०१९११६३$$

२०

$$= ०.३८२३२६०$$

ह्याची संख्या

$$= २.४११७१५०$$

-१

त्या लागरथमिक संख्येचें कांष्ठिमेंट म्हणतात, अथवा ज्या संख्येचें लागरथम वजा करावयाचें असेल त्या संख्येचा व्युत्क्रम घेऊन त्याचें जें लागरथम त्यास त्या संख्येचें कांष्ठिमेंट लागरथम म्हणतात.

	<u>१०४११७१५०</u>
ह्यांचें लाग०	= ०.१४९७४७०
लाग० (१००)	= २
कां० लाग० (००४५)	<u>= १०४६७८७५</u>
लाग० म	= ०.४९६५३४५१

∴ म = ३१३७.१४४ = ३१३७ पौंड २३ शि० १० १/२ पेन्स उत्तर.

जर सामाही व्याज घेण्याचा करार असेल, तर न = ४०,

$r_1 = \frac{0.45}{2} = 0.225$ , आणि  $r = 1.0225$ .

जर तिमाही व्याज घेण्याचा करार असेल, तर न = ८०,

आणि  $r = 1.09925$ .

३. एका जमिनीचे निक्कें उत्पन्न १३५ पौंड आहे, तर २१ वर्षांचा कळल देणें झाल्यास चक्रवाट व्याज दरसाल दरशेंकडा ५ पौंडांप्रमाणें आज किती पौंड घ्यावे ?

$$(४२ क० प्र०), \text{लाग० व} = \text{लाग०} \cdot (१ - r)^{-n} + \text{लाग० अ} - \text{लाग०} \cdot (२ - १), \\ = \text{लाग०} \cdot (१ - १.०५)^{-२१} + \text{लाग०} १३५ - \text{लाग०} (०.५).$$

$$\text{आतां लाग० } r^n = \text{लाग०} \cdot \frac{१}{r^n} = \text{कां० लाग० } r^n$$

$$= \text{कां० लाग०} (१.०५)^{२१} = १.९७८८१०७४२१$$

$$= २१ + २०.५५५०२४७$$

$$= १.५५५०२४७१$$

$\therefore \bar{r} = 0.34, 0.48, 22$ , आणि  $1 - \bar{r} = 0.68, 90, 47, 5$

लाग० (०.६४१०५७८)  $= 9.८०६८९७३$

लाग० (१३५)  $= २१३०३३३८$

कां० लाग० (०.०५)  $= 9.३०१०३००$

भाग० व  $= ३२३८२६११$

$\therefore$  बं =  $97300.८५६५ = 97300$  पौ० १७ शि०  $9\frac{1}{2}$  पेन्स. उत्तर.

४. दरसाल व्याजाचा हिशेब करण्याचा करार आहे, तर चक्रवाढ व्याज दरसाल दरशेंकडा ५ पौंडांप्रमाणे ८०० पौंडांचे ९ वर्षांत व्याज काय होईल?

उत्तर. ४४१ पौंड १ शि० ३ पेन्स.

५. साहामाही व्याजाचा हिशेब करण्याचा करार आहे. तर चक्रवाढ व्याज दरसाल दरशेंकडा ६ पौंडांप्रमाणे ३५६ पौंड वार्षिक प्राप्तीची ९ वर्षांत रास किती होईल?

उत्तर. ४१६७ पौ० १५ शि०  $४\frac{1}{2}$  पेन्स.

६. सरकाराने एका मनुष्यास ५ वर्षे पर्यंत ७० पौंड वर्षास न करून दिले, आणि त्यास असा दुकून दिला की निमाही पैसा घेत जावा. परंतु त्या मनुष्यास कर्जाने फार व्यापले होते, म्हणून त्यास आजच पैशाची फार गरज लागली, तर चक्रवाढ व्याज दरसाल



दरदोंकडा ५ पोंडां प्रमाणें त्यास त्या वर्षासनाची आज काय किंमत येईल?

उत्तर. ३०७ पों० १९ शि० ८  $\frac{१}{२}$  पेन्स.

७. एका मनुष्याचें आजपासून ५ वर्षांनीं १००० पोंड वर्षासना चालू होऊन तें २० वर्षे पर्यंत चालू गाः र आहे. परंतु त्यास आजच पेशाची फार गरज आहे, तर चक्रवाढव्याज दरसाल दरदोंकडा ५ पोंडां प्रमाणें त्यास त्याच्या वर्षासनाची आज काय किंमत येईल? उत्तर. ९७६४ पोंड ९ शि० ४  $\frac{१}{२}$  पेन्स.

८. एका शेतकऱ्याने १०० पोंड देऊन एका शेतानाचा ५५  $\frac{१}{२}$  वर्षे कळ घेतला, तर चक्रवाढव्याज दरसाल दरदोंकडा ५  $\frac{१}{२}$  पोंडां प्रमाणें तें शेत दुसऱ्यास भाड्याने देणें झाल्यास त्यानें दुसऱ्या पासून दरसाल किती भाडे घ्यावें? उत्तर. ५ पों० १६ शि०.

९. एका गृहस्थास १०० पोंड वर्षासना सतत चालावयाचें आहे, आणि दुसऱ्यास तितक्याच पोंडांचें वर्षासना ६० वर्षे चालावयाचें आहे, तर त्याच्या आणि त्याच्या वर्षासनाच्या आजच्या किंमतींत चक्रवाढव्याज दरसाल दरदोंकडा ५ पोंडां प्रमाणें काय अंतर पडेल?

